Мат. анализ

1.1. Определения

1, 2, 3: Множество вещ-х чисел $\{x\}$ наз-ся ограниченным сверху (снизу), если $\exists$ такое вещ-ое число M (m), что каждый $\forall$ элем. x множе-ва $\{x\}$ удовл. нер-ву $x \le M$ $(x \ge m)$. Число M (m) наз-ся верхней (нижней) гранью множе-ва $\{x\}$.

4, 5, 6: В предыдущ. опр. поменять местами кванторы $\exists$ и $\forall$ (каждый) и $(\le)$ $(\ge)$.

7: Послед-ть $\{x_n\}$ наз-ся ограниченной, если $\exists A$, $\forall$ $|x_n| \le A$.

8: -//-// $\forall A$, $\exists$ $|x_n| > A$.

9: Послед-ть $\{x_n\}$ наз-ся бесконеч. большой, если $\forall A$, $\exists N$, $\forall n \ge N$: $|x_n| > A$.
(Любая бескон. больш. явл. неогран, обрат. неверно)

10: Без модуля в пред. опред.

11: Число a наз-ся предельной точкой числового множе-ва $\{x_n\}$, если в $\forall$ ε-окр-ти т. a содерж-ся бескон. много членов множе-ва $\{x_n\}$ ($\exists$ $\{x_{k_n}\} \to a$ при $n \to \infty$)

12: $\bar{x}$ наз. точной верхней гранью X если:
1) $\forall x \in X$: $x \le \bar{X}$ ($\bar{x}$ - верх. гр); 2) $\forall \tilde{x} < \bar{X}$ $\exists x \in X$: $x > \tilde{x}$ ($\bar{X}$ - наим).

13: Число a наз-ся предельной точкой посл-ти $\{x_n\}$, если $\exists$ подпосл-ть $\{x_{k_n}\} \to a$ при $n \to \infty$

14: см 11.

11: Число a наз-ся предельной точкой посл-ти $\{x_n\}$, если посл-ть $\{x_n - a\}$ явл. бескон. малой

15: $\nexists$ $\{x_{k_n}\} \to a$ при $n \to \infty$

16: a - не предел. точка $\{x_n\}$, если $\exists$ ε-окр-ти т. a в кот. (не) содерж. (бескон. числа членов пос-ти $\{x_n\}$

17, 18: Аналогично 2 и 3.

19: $\{x_n\}$ - фундаментальная посл-ть, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$, $\forall n > N$ и $\forall m > N$: $|x_m - x_n| < \varepsilon$

20: Ряд наз-ся сходящимся, если сходится послед-ть $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда,

21: при этом предел S посл-ти частичных сумм $\{S_n\}$ наз-ся суммой д-нного ряда $S = \sum u_k$.

22: Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ наз-ся абсолютно сходящимся, если сход-ся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$.

23: Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}$ наз-ся условно сходящ., если этот ряд сходится, в то время как соответс. ряд из модулей расходится.

~~25~~ 25, 26: $f(x)$ наз-ся огранич. сверху (снизу) на X, если $\exists M(m)$, $x \in X: f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$),
~~30:~~ при этом $M(m)$ наз. верхней (нижней) гранью ф-ии $f(x)$ на множестве X.

~~27~~, 28, 29: В пред. опр. меняем местами $\exists$ и $\forall$ и заменяем $\leq$ на $>$, $\geq$ на $<$.

24: $f(x)$ наз-ся огранич. на X, если она огранич. на X и сверху и снизу ($\exists m$ и M,
~~27~~ $\forall x \in X: m \leq f(x) \leq M$).

27: $\forall m$ и M $\exists x \in X$: $M < f(x) < m$.
($\forall A > 0, \exists x \in X: |f(x)| > A$).

31. Число b наз-ся пределом ф-ии $f(x)$ в т. a (при $x \to a$), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, $\forall x \in$ $0 < |x - a| < \delta$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

32, 33: b наз-ся пределом $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(-\infty)$ если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A$, $\forall x > A$ $(x < A)$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

34: b наз-ся правым (левым) пределом ф-ии $f(x)$ в т. a (при $x \to a+0$ $[-0]$), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall x \in \{a < x < a + \delta\}$ ($\forall x \in \{a - \delta < x < a\}$) вып-ся нер-во $|f(x) - b| < \varepsilon$.

35: Ф-ия имеет предел при $x \to a$, если $\exists b \in R$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, $\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\}$: $|f(x) - b| < \varepsilon$ – b – предел ф-ии.

36; 37: Ф-ия имеет предел при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если $\exists b \in R$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A$, $\forall x > A$ $(x < A)$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

38: $f(x)$ наз-ся беск. большой положит. в т. a (при $x \to a$), если $\forall A > 0$ $\exists \delta > 0$, $\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\}$: $f(x) > A$.

39: ~~f(x) наз-ся бескон. малой при x→+∞~~
$f(x)$ наз. беск. больш. положит. при $x \to +\infty$ $\forall M$ $\exists A > 0$: $\forall x > A$, $f(x) > M$.

41: $f(x)$ наз-ся бескон. малой при $x \to +\infty$, если $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

40: $x \to a$: $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Определения

42: Число в наз. пределом ф-ии $f(x)$ в т. a, если $\forall$ сходящ. к a послед-ти $\{x_n\}$ такой, что $\forall\, n \in X$, $x_n \neq a$, соответ. пос-ть значений ф-ии $\{f(x_n)\}$ сход-ся к. в.

43: в наз-ся пределом $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\forall$ бескон. больш. положит. пос $\{x_n\}$ послед. $\{f(x_n)\} \to$ в.

44: Ф-ия $f(x)$ наз. бескон. больш. положит при $x \to a$ $\forall$ сход-ся к a послед-ти $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in X$, $x_n \neq a$, соответст. пос-ть $\{f(x_n)\}$ явл. бескон. больш. положит.

45: $f(x)$ наз-ся бескон. больш. отрицат. при $x \to a+0$ $\forall$ пос-ти $\{x_n\} \to a$ такой, что $x_n \in X$, $x_n > a$, соотвот. ~~пос~~ пос. $\{f(x_n)\}$ явл. беск. больш. отриц.

46: $f(x)$ наз-ся бескон. больш. положит. при $x \to -\infty$, если $\forall$ бескон. больш. отриц. пос-ти $\{x_n\}$ пос-ть $\{f(x_n)\}$ будет бескон. больш. положит.

47: Число в не явл-ся пределом $f(x)$ при $x \to a$, если $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in X$, $0<|x-a|<\delta$ $|f(x) - в| \geq \varepsilon$.

48: в не явл-ся пределом $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\exists \varepsilon > 0\ \forall A > 0 : \exists x > A$; $|f(x) - в| \geq \varepsilon$

49: —//— // $x \to -\infty$ —//—// $\forall A < 0 : \forall x < A$ —//—

50: $f(x)$ не явл-ся беск. больш. положит. при $x \to a+0$, если $\exists A > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in R$ $a < x < a + \delta$ выпол-ся нер-во $f(x) \leq A$.

51: $f(x)$ не явл-ся бескон. больш. отриц. при $x \to +\infty$ если $\exists A < 0\ \forall N > 0\ \exists x > N$ вып-ся нер-во $f(x) \geq A$

52: $\{x_n\}$ – не явл-ся фунд-ой, если $\exists \varepsilon > 0\ \forall N$, $\exists\, n > N$ и $\exists\, m > N : |x_m - x_n| \geq \varepsilon$.

53: Если $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то он наз-ся производной ф-ии $y = f(x)$ в т. x $(\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x))$

54: $f(x)$ наз-ся диф-ой в т. x, если приращ. ф-ии $f(x)$ в т. x можно представить в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где A некот-е число $(f'(x) = A)$, $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, и $\alpha(0) = 0$.

55: Дифференциалом ф-ии $y = f(x)$ в т. x наз-ся линейная ф-ия аргумента Δx
$$dy = f'(x)\Delta x$$
56: Ф-ия, имеющая n-ую производную в т. x_0, наз-ся n раз диф-ой в этой точкой.
57: 2-ой диф-ал ф-ии в т. x_0 наз-ся диф-ал от 1-го диф-ла: $dy = f'(x)dx$ $(dx = \Delta x)$,
$d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = dx\,d[f'(x)] = dx[f'(x)]dx = f^{(2)}(x)(dx)^2$.
58: $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)dx^n$
59: Ф-ия $F(x)$ наз. первообразной для ф-ии $f(x)$ на пром-ке X, если $\forall x \in X$: $F'(x) = f(x)$.
60: Совокупность всех первообразных для данной ф-ии $f(x)$ на X наз. неопредел. интегралом от ф-ии $f(x)$ на X: $\int f(x)dx$.
61: $f(x)$ наз-ся возраст. в т. x_0, если $\exists$ окр. т. x_0, в кот. $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$, и $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$.
62: Аналогично. ($f(x) > f(x_0)$ при $x < x_0$)
63: $f(x)$ наз-ся непрерывной в т. a, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ $[\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \{|x-a| < \delta\} : |f(x) - f(a)| < \varepsilon]$
64: $f(x)$ наз-ся непрерывна на промежутке X, если она непрерывна в каждой точке этого множ-ва.
65: $f(x)$ наз. равномер. непрерыв. на X, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, $\forall x'$ и $x'' \in X$, $|x'' - x'| < \delta : |f(x'') - f(x')| < \varepsilon$.
66: Предельные точки ф-ии, в кот. $f(x)$ не явл. непр. явл-ся точками разрыва ф-ии
67: т. a – точка устранимого разрыва, если $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, но при этом в т. a $f(x)$ не опр., либо $f(a) \neq b$.
68: a – т. разрыва I рода $f(x)$, если $\exists$ правый и левый пределы в т. a, но они не равны м/у собой
69: a – разрыв II рода $f(x)$, если $\nexists$ пределы справа и слева

определения:

70: В т. С ф-ия $f(x)$ имеет локальный минимум (максимум), если $\exists$ окр. т. С, в кот. $f(x) > f(c)$ ($f(x) < f(c)$) при $x \neq c$. локал. мин. и макс. объедин. в экстремум.

71: см. 70

72: $A(x_0; y_0) \in f(x)$ наз-ся точкой перегиба, если в этой точке кривая меняет направление выпуклости на вогнутость или наоборот.

73: Прямая $y = kx + b$ наз-ся накл. асимпт. граф. ф-ии $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – беск. мал. при $x \to +\infty$

74: Прямая $x = a$ наз. верт. асимпт. граф ф-ии $y = f(x)$, если хотя бы один из $\lim\limits_{a-0} f(x)$ ~~или~~ $\lim\limits_{a+0} f(x) = \overset{+}{(-)}\infty$.

75: $\exists$ ф-ия $y = f(x)$ задана на $[a, b]$, и $\exists$ множ-вом знач. этой ф-ии явл. $[\alpha, \beta]$. $\exists$ каждому y из сегмента $[\alpha, \beta]$, соотв. только одно значение x из $[a, b]$, для которого $f(x) = y$. Тогда на сегменте $[\alpha, \beta]$ можно опред. ф-ию $x = f^{-1}(y)$, ставя в соотв. кажд. y из $[\alpha, \beta]$ то значение x из $[a, b]$, для которого $f(x) = y$. Ф-ия $x = f^{-1}(y)$ наз-ся обратной для ф-ии $y = f(x)$.

79, 80: т. с не наз-ся точкой лок. макс (минимум) $f(x)$, если $\forall$ окр-ти т. С, в кот. $f(x) \geq f(c)$ ($f(x) \leq f(c)$). при $x \neq c$.

76: ф-ия не имеет разрыв I рода, если или $\nexists \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, или $\nexists \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, или $\exists \lim\limits_{x \to a-0} = \exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

77: ф-ия не имеет в т. a устранимый разрыв, если либо $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, либо $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ но в т. a $f(x)$ определ, либо $f(a) = b$.

78: ф-ия $f(x)$ не имеет в т. a разрыв II рода, если $\exists$ lim справа и слева.

Формулировки теорем.

1: Критерий Коши для послед.-тей:
Для того, чтобы пос-ть сходилась необходимо и достаточно, чтобы она была фундамент.

2: Критерий Коши для предела ф-ии при $x \to a$:
Для того чтобы $f(x)$ имела предел при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы она удовл. условию Коши: если $\forall \xi > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x', x'' \in X$, $0 < |x' - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta : |f(x'') - f(x')| < \xi$.

3: $x \to +\infty$ -//-//-: $\forall \xi > 0\ \exists A > 0,\ \forall x', x'' > A : |f(x'') - f(x')| < \xi$

4: Дифф-е сложной ф-ии: $\exists\ t = \varphi(x)$ дифф-ма в т. x_0, $\exists\ \varphi(x_0) = t_0$ и $\exists$ ф-ия $y = f(t)$ дифф-ма в т. t_0, тогда сложная ф-ия $F(x) = f(\varphi(x))$ – дифф-ма в т. x_0 и её произв. выраж. ф-ой:

$$F'(x_0) = f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$$

5: Дифф-е обратной ф-ии: $\exists$ ф-ия $y = f(x)$ – опред, задана, строго монот. и непрерывна в окр. т. x_0, дифф-ма в т. x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. $\exists\ f(x_0) = y_0$, тогда в нек-рой окр. т. x_0 $\exists$ обрат. ф-ия $x = f^{-1}(y)$, эта ф-ия дифф-ма в т. x_0 и справедливо рав-во

$$f^{-1\prime}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$: $\Big[\ y = \operatorname{tg} x;\ x = \operatorname{arctg} y;$ $(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \frac{1}{1/\cos^2 x} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}\ \Big]$

6: $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$; $\Big[\ y = \sin x;\ x = \arcsin y$.

$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$;

7: $y = e^x;\ x = \ln y$: $(e^x)' = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{1/y} = y = e^x$
$(e^x)' = e^x$.

8: $y = \ln x;\ x = e^y$;
$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$; $\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$

9: Для того чтобы ряд с положит. член. сходился, необходимо и достаточно, чтобы послед-ть частичных сумм этого ряда была ограничен.

10: Интегральный признак Коши - Маклорена
$\exists \sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\exists f(x)$, $(x \geq 1)$: 1) $f(x) \geq 0$; 2) $f(x)$ - невозр; 3) $f(k_n) = p_k$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ - сх-ся, если $\exists \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} a_n$.

11: Признак сравнения для числ. рядов:
$\exists \sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ - 2 ряда с полож. членами
$\exists$, далее, для всех номеров k справедливо нер-во $p_k \leq p_k'$. Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ влечёт за собой сходим. ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$; расходим. ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ влечёт за собой расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$.

12: Признак Даламбера (в непред. ф.ч):
$\exists \forall k$: $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$ $\left(\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1\right)$, тогда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сход-ся (расход-ся)

13: Признак Даламбера (в. пред. ф. ч):
Если $\exists \lim_{k\to\infty} p_{k+1}/p_k = h$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сход-ся при $h<1$ и расход-ся при $h>1$.

14: Признак Коши (в. непр. ф ч): $\exists \sqrt[k]{p_k} \leq q < 1$ (>1) $\forall k$, тогда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сход-ся (расход-ся).

15: Признак Коши (в. пред. ф ч):
Если $\exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = h$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сх-ся при $h<1$ и расх-ся при $h>1$.

16: Признак Лейбница:
Если все члены знакочеред. ряда, будучи взяты по модулю, образ. невозраст. беск. малую послед-ть, то этот ряд сх-ся.

17: Признак Дирихле - Абеля:
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, (1), $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. $\exists$ выполн. условия: 1) $\{b_n\}$ - невозр, и $\to 0$ при $n\to\infty$; 2) $\{S_n\}$ - огран, т.е $\exists M > 0$, $\forall n$: $|S_n| < M$. то ряд (1) сход-ся.

Формулировки теорем:

18: Т° о перестановке членов усл. сход. ряда: (Т° Римана)
Если ряд сх-ся условно, то, каково ни было наперед взятое число L, можно ТАК переставить члены этого ряда, чтобы преобразованный ряд сход. к L.

19: Интегрирование по частям:
] ф-ии $U(x)$ и $V(x)$ опред. и диф-мы на пром-ке X и] ф-ия $V(x)U'(x)$ имеет первообр. на X, т.е. $\exists \int V(x)U'(x)\,dx$. Тогда $\exists \int U(x)V'(x)\,dx$ и справ. рав-во: $\int U(x)V'(x)\,dx = U(x)V(x) - \int V(x)U'(x)\,dx$.

20: Интегрирование по частям:
] $x=\varphi(t)$ опред. и диф-ма на T и] X - множ. её значений.] на X опред. $y=f(x)$, имеющ. первообр. $F(x)$. Тогда ф-ия $F(\varphi(t))$ - явл. первообр. для ф-ии $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ на T.

$$\int f(x)\,dx \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

21: Т° о локал. огран. ф-ии, непр. в данной точке:
Если $f(x)$ непрерывна в т. a, то она огранич. в некотор. окр. т. a.

22: Т° об устойчивости знака ф-ии:
Если $f(x)$ непр. в т. x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то $\exists$ окр. т. x_0, в кот. $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f(x_0)$.

23: Т° Больцано - Коши:
] $f(x)$ непрерыв. на $[a;b]$ и] $f(a)\cdot f(b)<0$. Тогда $\exists\, c\in[a;b]$, в кот. $f(c)=0$.

24: Следств. из Т° Больцано - Коши:
] $f(x)$ непр. на $[a;b]$, $f(a)=A$, $f(b)=B$. Тогда $\forall C\in[A;B]\ \exists\, c\in[a;b] : f(c)=C$.

25: Т° Кантора:
Непрер. на сегменте ф-ия равномер. непр. на этом сегменте.

26: I Т° Вейерштрасса:
Непр. на сегменте ф-ия огранич. на этом сегменте.

27: II т° Вейерштрасса:
непр. на сегменте ф-ия достигает на этом сегменте своих точных граней.

30, 28: необходимое условие возр. диф. ф-ии:
Для того чтобы диф-ая на пром. X ф-ия не убывала (не возр.) на X необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in X$ вып. нер-во: $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

31, 29: достат. услов. возр.:
Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in X$, то $f(x)$ – возраст. (убыв) на X.

34, 32: Достат. услов. возр. в точке:
Если ф-ия $f(x)$ диф-ма в т. x_0 и $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то $f(x_0)$ возр. (убыв) в т. x_0.

33, 35: необх. услов. возр (уб) ~~на~~ т. x_0
Для того чтобы диф-ая ~~на пром-ке X~~ ф-ия в т. x_0 не убыв. (не возр) необходимо и достат. $f'(x_0) \geq 0$ (≤ 0).

36: т° о ф-ле Лагранжа:
] 1) $f(x)$ - опред. и непр. на $[a; b]$;
2) $f(x)$ - диф- ма в $(a; b)$. Тогда $\exists c \in (a; b)$:

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)}$$

37: т° о ф-ле Коши:
] 1) $f(x)$ и $g(x)$ опред. и непр. на $[a; b]$;
2) $f(x)$ и $g(x)$ диф. в $(a; b)$; 3) $\forall x \in (a; b)$: $g'(x) \neq 0$. Тогда $\exists c \in (a; b)$:

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

38: Ф-ла Тейлора с ост. чл. в ф. Пеано:
] $f(x)$ - опред. в нок. окр. т. x_0 и n раз диф. в т. x_0. Тогда: $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots$
$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$

Формулир. теорем.

39: Ф-ла Тейлора с ост. чл. в общей форме
] $f(x)$ опред. и $(n+1)$ раз диф. в некор. окр. т. x_0.] $p>0$ - произв. число, а x - произв. значение арг. из окр. т. x_0. Тогда $\exists \xi \in (x_0; x)$
$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p} \cdot \left(\frac{x-x_0}{x-\xi}\right)^p f^{(n+1)}(\xi).$$

40: Ф-ла Тейлора с ост. чл. в ф. Лагранжа.
$p = n+1$.
$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)), \ (0<\theta<1)$$

41: Необх. усл. экстр. диф. ф (т° Ферма):
Если $f(x)$ имеет локальный экстремум в т. c и $\exists f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

42: Дост. усл. экстрем. 2 диф. ф-ии:
] $f(x)$ дважды диф-ма в т. c и] $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$. Тогда, если $f''(c) > 0$ (<0), то т. c $f(x)$ имеет локал. min (max).

43: Дост. усл. экстрем. диф. ф-ии:
] c - т. возможного экстремума (либо $f'(x) = 0$, либо $f'(x) \nexists$) $f(x)$ и] в нек. прокол. окр. c ф-ия $f(x)$ - диф-ма. Тогда
1) если $f'(x) = \begin{cases} <0 \ (>0) \\ >0 \ (<0) \end{cases}$, при $x<c$, то в т. c $f(x)$ имеет локал. min (max),
2) если $f'(x)$ одного знака, то в т. c экстрем. нет.

44: Достат. услов. сущ. накл. асимпт:
Для того чтобы прямая $y = kx+b$ была наклон. асимпт. граф. ф-ии $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достат., чтобы существов. пределы
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b.$$

45: Необход. услов. сущ. накл. асим:
] $y = kx+b$, и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b$
то эта прямая - накл. асимп. к $y = f(x)$

46: Необход. усл. перегиба:
∃ $y=f(x)$ имеет в т. a непр. $f''(x)$ и ∃ в т. $M(a; f(a))$ — перегиб. Тогда $f''(a)=0$.

47: I достат. усл. перегиба:
∃ $M(a; f(a))$ — т. возм. перегиба $f(x)$ и в нек. прокол. окр. т. a ∃ $f''(x)$, имеющая разные знаки. Тогда в т. M — график имеет перегиб.

48: II достат. усл. перегиба:
∃ $f(x)$ — 3-ды дифф-ма в т. a и $f''(a)=0$ и $f'''(x)\neq 0$. Тогда в т. $M(a; f(a))$ — точка перегиба.

Простые задачи.

① Предельные точки послед. $x_n = (-1)^n$

По опред. предел. точки послед: это такие точки, в $\forall$ окр. кот. нах-ся бескон. много членов послед. Значит, таких точек 2: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

② Предельные точки $x_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n}\right)$.

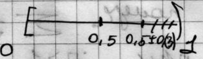
При $n \to \infty$ $\sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n}\right) \to \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$.

По опред. предел. точки посл. получаем, при $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

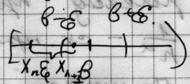
$x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

Ответ: $\{0, 1, -1\}$

③ Предельные точки x_n = дробная часть $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Дробная часть



всегда $\in [0;1)$, причём с возрастанием n, расстояние м/у соседними членами уменьшается. При $n \to \infty$ точки послед. x_n будут проходить от 0 до 1 бескон. много раз. Возьмём произвольный шаг, и расстояние м/у x_n и $x_{n+1} = \varepsilon$.



По опред. предел. точки послед. $\forall \varepsilon\ \exists в$ -//-//. выберем произв. т. в, и в окрест. этой точки будет нах. по крайней мере один член послед. При дальнейших шагах в ε-окр. т. в будет попадать всё больше членов послед. $\Rightarrow$ Ответ: $\forall в \in R$.

④ Предел. точки послед: $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5} \dots$

Очевидно, что предел. точками явл все $x = \frac{1}{k}$, причём $x \in [0; 1]$, где $k \in \mathbb{N}$.

⑤ При каких $p>0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+n^p}}$ сх.?

1) абсолютно.

рассмотрим ряд $\left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+n^p}}\right| =$

$= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+n^p}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1+n^{p-1}}}$

при $0<p\leq 1$ $\sqrt{1+n^{p-1}} \to 1$, то получ. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, котор. расход.

при $p>1$, то $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}} \to$ а этот ряд сходится при $p>2$ и расход. при $1<p\leq 2$ (т.к. $\frac{1}{n^\alpha}$ – сх. при $\alpha>1$ и расх. при $0<\alpha\leq 1$.)

Получаем, что при $p>2$ исходный ряд сх. абсолют.

2) $(-1)^n$ – огран. и $\frac{1}{\sqrt{n+n^p}}$ – монот. убыв, то по призн. Дирихле-Абеля ряд сх. условно, при $0<p\leq 2$.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$, $p>0$

Рассмотр. ряд $\left|\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$

при $p>1$ этот ряд сходится, при $0<p\leq 1$ – расход.

след-но, при $\underline{p>1}$ исходный ряд сх-ся абсолютно.

$0<p\leq 1$.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$? По призн. Дирихле-Абеля

$(-1)^n$ – огран. и $\frac{1}{n^p}$ – монот. убыв., то ряд сходится условно,

$\underline{p \in (0;1]}$

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{p^n}{n^2}$ при $p \in [-1;1]$ ряд сходится абсолютно, по необходимому условию сход. ряда.

При $p>1$ и $p<-1$ ряд расходится.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ при $n\to\infty$ – огранич.

Тогда по признаку Дирихле-Абеля

1) при $0<p\leq 1$ – сх-ся, значит, при $p>1$ – расход-ся.

16 $f(x)=x\ln x$; $f'(x)=\ln x+1$, $f''(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$, $f'''(x)=-x^{-2}$, $f^{10}(x)=x^{-9}$

17 $f(x)=\sqrt{x}$; $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$, $f'''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, $f^{(4)}(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

18 $f(x)=x\cdot e^{-x}$, $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$, $f''(x)=e^{-x}-(e^{-x}-xe^{-x})=e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=-2e^{-x}+xe^{-x}$
$f'''(x)=2e^{-x}+e^{-x}-xe^{-x}=3e^{-x}-xe^{-x}$, $f^{(4)}(x)=-3e^{-x}-(e^{-x}-xe^{-x})=-4e^{-x}+xe^{-x}$
$f^{(30)}(x)=-30e^{-x}+xe^{-x}$

19 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$, $f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$, $f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$, $f^{(40)}(x)=\frac{41!\cdot x^{-\frac{81}{2}}}{20^{40}20^{20}20!}$

20
$f(x)=x\sin x$, $f'(x)=\sin x+x\cos x$, $f''(x)=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$
$f'''(x)=-2\sin x-\sin x-x\cos x=-3\sin x-x\cos x$, $f^{(4)}(x)=-3\cos x-\cos x+x\sin x=$
$=\cancel{-3\sin x-x\cos x}-4\cos x+x\sin x$
$f^{(12)}(x)=12!\sin x(x+\frac{11\pi}{2})+x(\sin(x+\frac{12\pi}{2}))=-12\cos x+x\sin x$

21 $f(x)=x^2e^x$, $f'(x)=2xe^x+x^2e^x$, $f''(x)=2e^x+2e^xx+2xe^x+x^2e^x=$
$=2e^x+4xe^x+x^2e^x$, $f^{(3)}(x)=2e^x+4e^x+4xe^x+2xe^x+x^2e^x=6e^x+6xe^x+x^2e^x$
$f^{(n)}=x^2e^x+2xe^x+e^x\sum_{p=1}^{n-1}2p$, $f^{(100)}=x^2e^x+200xe^x+e^x\cdot 2\cdot 50\cdot 99$

22 $f(x)=x^2\sin x$
$f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$, $f''(x)=2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x=$
$=2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x$
$f'''(x)=2\cos x+4\cos x-4x\sin x-2x\sin x-x^2\cos x=6\cos x-6x\sin x-x^2\cos x$
$f^{(4)}(x)=-6\sin x-6\sin x-6x\cos x-2x\cos x+x^2\sin x=$
$=-12\sin x-8x\cos x+x^2\sin x$
$f^{(n)}(x)=x^2\sin(x+\frac{\pi n}{2})-2nx\cos(x+\frac{\pi n}{2})+\sum_{p=1}^{n}2(p-1)\sin(x+\frac{\pi}{2}(n-2))$
при $n>2$
$f^{(200)}(x)=x^2\sin x-400x\cos x-\sin x\sum_{p=1}^{200}2(p-1)$; $2\sum_{p=1}^{200}(p-1)=2\cdot 200\cdot 99$
$f^{(200)}(x)=x^2\sin x-400x\cos x-400\cdot 99\sin x$

23
$f(x)=x\cos x$, $f'(x)=\cos x-x\sin x$, $f''(x)=-\sin x-\sin x-x\cos x=$
$=-2\sin x-x\cos x$, $f'''(x)=-2\cos x-\cos x+x\sin x=-3\cos x+x\sin x$
$f^{n}(x)=n\sin(x+\frac{\pi}{2}n)+x\cos(x+\frac{\pi}{2}n)$

24 $f(x)=x^2\cos x$, $f'(x)=2x\cos x-x^2\sin x$, $f''(x)=2\cos x-2x\sin x-$
$-2x\sin x-x^2\cos x=2\cos x-4x\sin x-x^2\cos x$
$f'''(x)=\cancel{2\cos x-4x\sin x-x^2\cos x}$, $f'''=-6\sin x-6x\cos x+x^2\sin x$
$f^{(n)}(x)=x^2\sin(x+\frac{\pi}{2}(n+1))+2n\sin(x+\frac{\pi}{2}n)+\sum\cos(x+\frac{\pi}{2}(n-2))$
$\sum_{p=1}^{n-1}2p=2\sum_{p=1}^{n-1}p$, $f^{(71)}(x)=x^2\sin x-142\cos x-\sin x\cdot 2\cdot 71\cdot 70$

25 I $x_n=\frac{2^n}{n^{2005}}$ a) II $x_n=\frac{\log_{2005}n}{n^{101}}$ f) III $\sqrt{x_n}=\frac{1}{\sqrt{n}-1}$ a

26 $x_n=\frac{n!}{n^n}$ f) II a) III a)

(27) I f) II f) III a)

(28) I f) II a) III a)

(29) $x_n = \frac{\log_2 n}{n^5}$ f) II a) III a)

(30) I a) II f) III a)

(31) $\int \sqrt{x}\ln x\, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{x} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int \sqrt{x}dx =$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)$

(32) $\int x\ln\sqrt{x}\, dx = \frac{1}{2}x^2\ln\sqrt{x} - \frac{1}{4}\int x^2\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\sqrt{x} - \frac{1}{4}\int x\, dx =$

$= \frac{1}{2}x^2\ln\sqrt{x} - \frac{1}{4}\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{8}x^2 = \frac{1}{8}x^2(4\ln x - 1)$

(33) $\int \sin(\ln x)dx \quad y = \ln x \quad x = e^y \quad dx = dy\, e^y$

$\int e^y\sin y\, dy = e^y\sin y - \int e^y\cos y\, dy = e^y\sin y - e^y\cos y - \int e^y\sin y\, dy \Rightarrow$

$2(\int e^y\sin y\, dy) = e^y(\sin y - \cos y) \Rightarrow I = \frac{e^y}{2}(\sin y - \cos y) = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) =$

$= \frac{x}{2\sqrt{2}}\sin(\ln x - \frac{\pi}{4})$

(34) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\cos(\ln x) - \int\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx = -\frac{\cos(\ln x)}{x} -$

$\cancel{-\frac{1}{x}\cos(\ln x)\int\frac{1}{x}\sin(\ln x)dx} - \int\sin(\ln x)d(\ln x) = -\frac{\cos(\ln x)}{x} + \cos(\ln x)$

$= \cos(\ln x)(1 - \frac{1}{x})$

(35) $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int\frac{e^x de^x}{\sqrt{1+e^x}} = \{t = e^x\} = \int\frac{t\, dt}{\sqrt{1+t}} =$

$= \int\frac{t\sqrt{1+t}}{1+t}dt = \int\frac{\sqrt{1+t}(1+t) - \sqrt{1+t}}{1+t}dt =$

$= \int\sqrt{t+1}\, dt - \int\frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t+1} =$

$= \sqrt{t+1}\left(\frac{2}{3}t - 4\right) = \frac{2}{3}\sqrt{t+1}(t-2)$

(36) $\int e^x\sqrt{1+e^x} = \int\sqrt{1+e^x}\, de^x = \frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}}$

(37) $\int\ln(x+\sqrt{x^2-1})dx = x\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \int\frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot$

$\cdot(1+2\sqrt{x^2-1}) = \int\frac{x(\sqrt{x^2-1}+x)dx}{(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2-1})} + x\ln(x+\sqrt{x^2-1}) =$

$= x\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{x^2-1}} = x\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \sqrt{x^2-1}$

(38) $\int\ln(\sqrt{x^2+1}-x)dx = x\ln(\sqrt{x^2+1}-x) - \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1\right) =$

$= x\ln(\sqrt{x^2+1}-1) + \int\frac{x(x-\sqrt{x^2+1})dx}{(\sqrt{x^2+1}-x)\sqrt{x^2+1}} = x\ln(\sqrt{x^2+1}-1) + 2\sqrt{x^2+1}$

Д9

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(p+\frac{p^2}{n}\right)^n$ $p>0$ если ряд сходится, то сходится абсолютно.

Используя критерий Коши, имеем

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(p+\frac{p^2}{n}\right)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(p+\frac{p^2}{n}\right)<1 \Rightarrow$

$0<p<1$, ряд сходится абсолютно

при $p>1$ ряд расходится

при $p=1$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ расходится, т.к.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$

Д10

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^p \sin \pi\left(n+\frac{1}{n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^p\cdot(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^p \sin\frac{\pi}{n}=\pi n^{p-1}$, т.е $p<1$

Используем критер. Дирихле-Абеля

$U_n=n^p$ $\quad V_n=(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$

V_n - сходится, поскольку

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$ (по Лейбницу) $\Rightarrow$

послед частичн. сумм ограничена

$\{U_n\}$ должна быть беск. малой невозр

т.е $\{n^p\}$ при $p>0$ невозможно

Если же поменять u_n и v_n, то

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^p$ - расходится при $\forall p>0$

Д9

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(p+\frac{p^2}{n}\right)^n$ $p>0$ если ряд сходится, то сходится абсолютно.

Используя критерий Коши, имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(p+\frac{p^2}{n}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(p+\frac{p^2}{n}\right)<1\Rightarrow$$

$0<p<1$, ряд сходится абсолютно

при $p>1$ ряд расходится

при $p=1$

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ расходится, т.к.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq0$$

Д10

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^p\sin\pi\left(n+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}n^p\cdot(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^p\sin\frac{\pi}{n}=\pi n^{p-1}$, т.е $p<1$

Используем критер. Дирихле - Абеля

$U_n=n^p$ $\quad V_n=(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}$

V_n - сходится, поскольку

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$ (по Лейбницу) $\Rightarrow$ послед. частичн. сумм ограничена

$\{U_n\}$ должна быть беск. малой невозр

т.е $\{n^p\}$ при $p>0$ невозможно

Если же поменять u_n и v_n, то

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^p$ - расходится при $\forall p>0$

Применим Лейбница

$\sum_{n=1}^{\infty} n^p (-1)^n \sin\frac{\pi}{n}$ знакочер. ряд сходится

при $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ т.е при $0<p<1$

$\cancel{\left|\sum (-1)^n n^p \sin\frac{\pi}{n}\right|} = \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n| n^p \sin\frac{\pi}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \sin\frac{\pi}{n}$

Применим Коши:

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^p \sin\frac{\pi}{n}} = \lim_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{n})^p \lim_{n\to\infty} \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{n}} < 1 \Rightarrow$

сходится абсолютно

при $0<p<1$ и расход. $p\geq 1$

Д 11

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

по ~~Дир.~~ - Абелю

$\cancel{U_n = x^n;\ V_n = \frac{1}{n}}$

$\cancel{V_n}$ - б.м. невозр.

$U_n = x^n$ при $x=0$ - ряд сходится абсолютно

при $x\neq 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0$ при $x\leq 1$

при $x<0$

ряд будет со знакочеред. чл. $\Rightarrow$

по Лейбницу будет сходится при

$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n} = 0$ т.е при $-1\leq x<0$

Исследуем на сходимость

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, при $0<x\leq 1$ при $x=1$ ряд расходится

$\Rightarrow$ при $\underline{x=-1}$ сходится условно применим критерий коши: при $0<x<1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{\sqrt[n]{n}} = x<1 \Rightarrow$

ряд сходится абсолютно

Ответ: при $x\in[-1;1)$ ряд сходится абсолютно при $x=-1$ – условно и расходится во всех остальных случаях

№12

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n$

при $x>0$ $\lim\limits_{n\to\infty} nx^n = 0$ при $0<x<1$

при $x<0$ ряд знакочер. $\Rightarrow$

будет сходится при $-1<x<0$

при $x=0$ ряд сходится абсолютно

По коши $0<x<1$

$\lim \sqrt[n]{nx^n} = \lim \sqrt[n]{x^n} = x<1 \Rightarrow$

ряд сходится абсолютно при $x\in(-1;1)$ и расходится во всех остальных случаях

№13

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ряд сходится абсолютно при $p>1$ и расходится во всех остальных

№14

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ ряд сходится при

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, т.е. при $p>0$ $\Rightarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при $p>1$ сходится абсолютно

при $0<p\leq 1$ условно.

№15

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^n \ln n}$$ По Лейбницу

~~сходится~~ при $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{p^n \ln n}$ при $\forall p \neq 0$

рассмотрим для $p > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p^n \ln n}$$ по Раабе

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{\ln n \, p^n}{\ln(n+1)\, p^{n+1}}\right) = \lim_{n\to+\infty} n \left(\frac{p\ln(n+1) - \ln n}{p \ln(n+1)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{(n+1)^p}{n}\right)^n}{p(\ln(n+1))} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{np} \cdot n^{n(p-1)}}{p\ln(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n^{n(p-1)}}{p\ln(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(p-1)}{p} \frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n(p-1)}{p} \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(p-1)}{p}$$

при $\left.\begin{matrix} 0 < p \leq 1 \\ -1 \leq p < 0 \end{matrix}\right\}$ ряд сходится условно

при $|p| > 1$ ряд сходится абсолютно.

1 Докажите, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ по Коши, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ по Гейне.

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ по Коши (1), покажем, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ по Гейне, т.е. $\forall \{x_n\}\to a$, $x_n\neq a$ $\{f(x_n)\}\to b$, т.е. $\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon): \forall n>N: |f(x_n)-b|<\varepsilon$ (2). Зададим $\varepsilon>0$. Согласно (1) $\exists \delta>0: 0<|x-a|<\delta$ (3), т.к. $\{x_n\}\to a$, $x_n\neq a$, то для указанного $\delta\ \exists N: \forall n>N \to 0<|x_n-a|<\delta$ (4) Из (4), (3) $\to$ (2)

2. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ по Гейне, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ по Коши.

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ по Гейне (1), $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)\neq b$ по Коши, тогда $\exists \varepsilon>0,\ \forall\delta>0\ \exists\ x\in(0<|x-a|<\delta): |f(x)-b|\geq\varepsilon$

Возьмем $\{\delta_n\}\to+0$, $\delta_n>0$. Согласно предположению $\forall\delta_n\ \exists x_n: 0<|x_n-a|<\delta_n>0$ (2), при этом $|f(x_n)-b|\geq\varepsilon$ (3). Из (2) $\Rightarrow \{x_n\}\to a$, $x_n\neq a$, тогда в силу (1) $\{f(x_n)\}\to b \Rightarrow |f(x)-b|\to 0$, $n\to\infty$ (4). В силу (3) $\lim|f(x_n)-b|\geq\varepsilon>0$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

3 Докажите, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ по Гейне, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ по Коши.

$\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ „по Гейне", предположим, что

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq b$ „по Коши", тогда:

$\exists\ \varepsilon>0: \forall A>0\ \exists\ x>A: |f(x)-b|\geq\varepsilon$

Пусть $A_n=n$ $(n=1,2,3,\dots)$

тогда $\forall A_n\ \exists\ x_n>A_n: |f(x_n)-b|\geq\varepsilon$ $(*)$

тогда $\forall A_n\ \exists\ N: \forall n\geq N\ x_n>A_n$, но $|f(x)-b|\geq\varepsilon$.

Но тогда $\{x_n\}$ - беск. большая положительная, тогда по условию $\{f(x_n)\}\to b$, чему противоречит $(*)$. ч.т.д.

4. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ "по Коши", то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ "по Гейне".

$\exists$ $\{x_n\}$ – $\forall$ беск. большая положит. посл-сть
По условию $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ A>0: |f(x)-b|<\varepsilon$ для $\forall x>A$.
т.к. $\{x_n\}$ – беск. большая положит., то для $A>0$ найдётся $N: \forall n\geq N\ \ x_n>A$, тогда $|f(x_n)-b|<\varepsilon\ \ \forall n\geq N$, это зн. $\{f(x_n)\}\to b$.

5. Докажите, что если $f(x)\to+\infty$ при $x\to a$ "по Гейне", то $f(x)\to+\infty$ при $x\to a$ "по Коши".

$\exists\ \lim\limits_{x\to a} f(x)\to+\infty$ "по Гейне", предположим, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)\not\to+\infty$ "по Коши", тогда
$\exists\ A>0: \forall\ \delta>0\ \exists\ x: 0<|x-a|<\delta$, то $f(x)<A$.
Пусть $\delta_n=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\dots)$, тогда
$\forall\ \delta_n=\frac{1}{n}\ \exists\ x_n: \quad 0<|x_n-a|<\frac{1}{n}$, то $f(x_n)<A$ $*$
Левое нер-во значит, что $\{x_n\}\to a$ и $x_n\neq a$, но тогда согласно условию $\{f(x_n)\}$ – б. большая положительная посл-сть, чему противоречит $(*)$

6. Докажите, что если $f(x)\to\infty$ при $x\to a$ "по Коши", то $f(x)\to+\infty$ при $x\to a$ "по Гейне".

$\exists\ \{x_n\}$ – $\forall$ послед. сход-ся к a.
$\forall A>0\ \ \exists\ \delta>0: \forall x: 0<|x-a|<\delta\ \ f(x)>A\ \ (*)$

Т.к. $\{x_n\}$ сход. к a, то для данного $\delta>0$
$\exists N: \forall n\geq N\ \ 0<|x_n-a|<\delta$
но тогда из $(*)\Rightarrow f(x_n)>A\ \ \forall n\geq N\Rightarrow$

$\Rightarrow \{f(x_n)\}$ – беск. большая положит посл-сть

7 Докажите, что возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.

Т.к. $\{x_n\}$ ограничена сверху, то она имеет точную верхнюю грань $a = \sup(x_n)$. $\forall n \in N \to x_n \le a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $x_n < a + \varepsilon$ (1); $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 : x_{N_0} > a - \varepsilon$. Т.к. посл-ть монотонно возрастает, то $x_n > x_{N_0} \; \forall n > N_0$

$a - \varepsilon < x_{N_0} < x_n < a + \varepsilon \quad \forall n > N_0$

$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 : \forall n > N_0$ $\to |x_n - a| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

8 Докажите, что убывающая ограниченная последовательность имеет предел.

Т.к. $\{x_n\}$ ограничена снизу, то она имеет точную нижнюю грань $a = \inf(x_n)$. $\forall n \in N \to x_n \ge a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $x_n > a - \varepsilon$ (1); $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0$ $x_{N_0} < a + \varepsilon$. Так как последовательность монотонно убывает: $x_n < x_{N_0} \; \forall n > N_0$

$a - \varepsilon < x_n < x_{N_0} < a + \varepsilon \quad \forall n > N_0$

$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 : \forall n > N_0 \to |x_n - a| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

9 Докажите, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится

Лемма Бернулли: $(1+x)^n \ge 1 + nx \;\; \forall n \in N$, $x > -1$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1 + 1/(n+1))^{n+1}}{(1 + 1/n)^n} = \left(\frac{1 + 1/n+1}{1 + 1/n}\right)^{n+1} \cdot (1 + 1/n) = \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > \left[1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right] \frac{n+1}{n} = 1$$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ — последовательность возрастает

аналогично для вспомог. послед-ти $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$\frac{y_{n-1}}{y_n} > 1$ — последовательность убывает

$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < y_n < y_{n-1} < \ldots < y_1$

монотонная огр. п-ть сходится:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e$

29 $\exists\, P_n(x)$ – многочлен Тейлора дифференцируемой n раз в точке x_0 функции $f(x)$. Док-ть, что $f(x_0+\Delta x) = P_n(x) + o((\Delta x)^n)$

По определению: $\dfrac{o((\Delta x)^n)}{(\Delta x)^n} = o(1)$,

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

рассмотрим предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}{(\Delta x)^n}$$

он эквивалентен $\left(\sim \frac{0}{0}\right)$, док-ть, что он $= o(1)$.

воспользуемся правилом Лопиталя n раз:

$$1.\ \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f'(x_0+\Delta x) - f'(x_0) - \ldots - \frac{(f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}}{n(\Delta x)^{n-1}} = \ldots$$

$$\ldots = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f^{(n)}(x_0+\Delta x) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

утверждение доказано.

30 Теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

$\exists$ ф-ция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и n раз дифференцируема в т. x_0, тогда $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) =$

$= P_n(x) + o((x-x_0)^n)$. (1)

Док-во: $\exists$ $R(x) = f(x) - P_n(x)$.

требуется док-ть, что $R(x) = o((x-x_0)^n)$, $x \to x_0$,

т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0$. (2)

В силу усл-ия теоремы $f(x)$ — n раз дифференцируема и непрерывна: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

$\ldots \lim\limits_{x \to x_0} f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0)$,

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = P_n(x_0)$;

$\lim\limits_{x \to x_0} (f^{(n-1)}(x)) = f^{(n-1)}(x_0) + P_n^{(n-1)}(x_0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} Rx = \lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - P_n(x)] = f(x_0) - P_n(x_0) = 0$. (3)

$\lim\limits_{x \to x_0} R'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} [f'(x) - P_n'(x)] = f'(x_0) - P_n'(x_0) = 0$ (3')

и т.д. до $(n-1)$ производной.

$\lim\limits_{x \to x_0} R^{(n-1)}x = \lim\limits_{x \to x_0} (f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x)) = f^{(n-1)}(x_0) - P_n^{(n-1)}(x_0) = 0$.

В силу (3) предел (2) явл-ся неопред-ю $\left(\frac{0}{0}\right)$

В силу (3') предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R'(x)}{((x-x_0)^n)'} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{n} \cdot \frac{R'(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = \left|\frac{0}{0}\right|$

В силу (3^{n-1}): $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R^{(n-1)}(x)}{(x-x_0)^{n(n-1)}} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{R^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \left(\frac{0}{0}\right)$

(*)

Для выч-ия предела (*) воспользуемся:

$R^{(n+1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)$

30. продолжение:

Воспользуемся тем, что $f^{(n-1)}(x)$ - дифф-ма в т. x_0, и её приращение:

$$f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x_0)\right)'(x-x_0) + o(x-x_0) =$$
$$= f^{(n)}(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0);$$ в силу этого

$f^{(n-1)}(x) = o(x-x_0)$, предел (4): $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{o(x-x_0)}{n!(x-x_0)} = 0$.

Применим к (2) правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{R'(x)}{[(x-x_0)^n]'} = \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{R^{(n-1)}(x)}{[(x-x_0)^n]^{(n-1)}} = 0.$$

т.е. $R(x) = f(x) - P_n(x) = R_{(n+1)}(x)$ $(1')$

Доказали, что $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$ $(1')$,

где
$$R_{(n+1)}(x) = o((x-x_0)^n) \quad \text{при } x \to 0$$

ф-ла $1'$ - формула Тейлора.

$R_{n+1}(x)$ - остаточный член ф. Тейлора.

$o((x-x_0)^n)$ - остаточный член в ф. Пеано.

31. Теорема о ф-ле Тейлора с остаточным членом в общей форме.

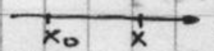
] $f(x)$ определена и $(n+1)$ раз дифференц-ма в некоторой окрестности т. x_0, p – произвольн. число, x – произв. знач-ие аргумента из указ-ой окрестности, $x \neq x_0$. Тогда $\exists\, \xi \in (x_0; x)$:

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}\left(\frac{x-x_0}{x-\xi}\right)^p (x-\xi)^{n+1} \quad (1).$$

(1) – остаточный член в общей форме.

Док-во:

] $p>0$ и $\forall x$ из окр x_0,] $x>x_0$



, обозначим $\varphi(x, x_0) \equiv P_n(x)$

$$\varphi(x,x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

] t изм-ся от x до x_0. На (x_0, t_0) введём ф-ию $\psi(t) = f(x) - \varphi(x,t) - \left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^p \underbrace{(f(x) - \varphi(x,x_0))}_{R_{n+1}x}$.

Эта ф-ия удовлетворяет всем усл. т. Ролля:

1. ф-ия $\psi(t)$ непрерывна на $[x_0 \le t \le x]$
2. $\psi(t)$ дифференцируема на $x_0 < t < x$
3. на концах: $\psi(x) = \psi(x_0) = 0$ (уб-ся $x_0 = t$)

$\Rightarrow \exists$ т. $\xi \in [x_0, x]$: $\psi'(\xi) = 0$

$$\psi'(t) = -\Big[f'(t) - \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t) + 2\frac{f^{(2)}(t)}{2!}(x-t) - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-1)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\Big] + \frac{p(x-t)^{p-1}}{(x-x_0)^p} R_{n+1}(x).$$

все члены (за искл. посл. 2) взаимно уничтож-ся.

$$\psi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p\frac{(x-t)^{p-1}}{(x-x_0)^p} R_{n+1}(x).$$

Полагая, $t = \xi$: $$0 = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{p(x-\xi)^{p-1}}{(x-x_0)^p} R_{n+1}(x)$$

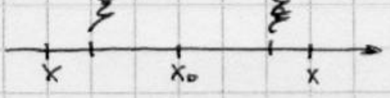
откуда $$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^p (x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi)$$

остаточный член в общей форме.

32. Теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

остаточный член в ф. Лагранжа — частный случай общей формы, но число $p = n+1$.,

тогда $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$



$$\xi - x_0 = \theta(x-x_0); \; 0 < \theta < 1.$$

$$\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}\underbrace{(x-x_0)^{n+1}}_{o(x-x_0)^n}$$

33 Обобщенная формула конечных приращений Коши.] $f(x)$, $g(x)$ определены на $[a;b]$ и диф-мы на $(a;b)$, $g'(x) \neq 0$. Тогда $\exists c \in (a;b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)};$$ Введем $F(x) = f(x) - f(a) -$

$$- \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a));$$ $F(x)$ удв. теореме

Ролля (ее условиям): $F(a) = F(b) = 0$;

$\Rightarrow \exists$ т. $c \in (a;b)$: $F'(c) = 0$;

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

34
36 Правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$;

$f(x)$, $g(x)$ определены и диф-мы в проколотой окр. т. x

] $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = (0/0)$.

Доопределим $f(x)$ и $g(x)$ в т. a по непрерывности, положим $f(a) = g(a) = 0$. Возьмем произвольное $x \neq a$ из окрестности и применим формулу Коши для $[x;a]$: $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, $c \in [x;a]$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, переходя к пределу $x \to a$
$\Rightarrow c \to a$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)};$$

35 Аналогично для $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$. Возьмем $x \neq a$ из окрестности и применим формулу Коши для $[x;a]$: $\frac{f'(x)-f'(a)}{g'(x)-g'(a)} = \frac{f''(c')}{g''(c')}$ $c' \in [x;a]$

т. к. $f'(a) = g'(a) = 0$, перейдем к пределу $x \to a$, $c' \to a$

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f''(a)}{g''(a)};$$

37. Произведение двух бесконечно малых ф-ий есть бесконечно малая функция

$\exists\ f(x), g(x)$ – б. малые в т. $x=a$ функции.

$\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta_1, \delta_2>0: \forall\, x\in\{0<|x-a|<\delta_1\}\to|f(x)|<\sqrt{\varepsilon}$
$\forall\, x\in\{0<|x-a|<\delta_2\}\to|g(x)|<\sqrt{\varepsilon}$,
тогда пусть $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$; $\forall\, x\in\{0<|x-a|<\delta\}$

$\to |f(x)\cdot g(x)|=|f(x)|\cdot|g(x)|<\sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\varepsilon}=\varepsilon$,
следовательно $f(x)\cdot g(x)$ – б. малая ф-ия

38 Сумма двух беск. малых в т. a функций является бесконечно малой функцией в т. a.

$\exists\ f(x), g(x)$ - б. малые в т. $x=a$ функции.

$\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta_1, \delta_2>0 : \forall x \in \{0<|x-a|<\delta_1\} \to |f(x)|<\varepsilon/2;$

$\forall x \in \{0<|x-a|<\delta_2\} \to |g(x)|<\varepsilon/2;$

δ = минимальное из $\{\delta_1, \delta_2\}$; $\forall x \in \{0<|x-a|<\delta\}$

$\to |f(x)+g(x)| \le |f(x)|+|g(x)| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |f(x)+g(x)|<\varepsilon$

39 Докажите, если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то

$\exists \lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = A+B$.

/* Лемма. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, то $f(x)=b+\alpha(x)$

$f(x)=b+\underbrace{[f(x)-b]}_{\alpha(x)}$. Докажем, что $\alpha(x)$ - б.м. в $x=a$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0, \forall x \in \{0<|x-a|<\delta\} : |\underbrace{f(x)-b}_{\alpha(x)}|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon \Rightarrow \alpha(x)$ - б.м.

Обратно: если $f(x)=b+\alpha(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ */

$f(x)=A+\alpha(x)$; $g(x)=B+\beta(x)$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = A+B$

40 Докажите, если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то

$\exists \lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=A-B$

$f(x)=A+\alpha(x)$; $g(x)=B+\beta(x)$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = A-B;$

41 Докажите, что если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, то

$\exists \lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = A\cdot B$

$f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a}[A\cdot B+\underbrace{A\cdot\beta(x)}_{б.м}+\underbrace{B\cdot\alpha(x)}_{б.м}] = A\cdot B$

42 Докажите, что если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, то то $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

$f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} =$

$= \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B} + \frac{A}{B} = \frac{A}{B} + \frac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B(B+\beta(x))}$;

$\frac{B\cdot\alpha(x) - A\beta(x)}{B(B+\beta(x))} = \frac{B\alpha(x) - A\beta(x)}{B} \cdot \frac{1}{B+\beta(x)} = \gamma(x) \cdot \frac{1}{B+\beta(x)}$;

$\gamma(x)$ – б. м; докажем, что $1/y(x) = (B+\beta(x))^{-1}$ – ограниченная.

$\lim\limits_{x\to a} y(x) = B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \in \{0 < |x-a| < \delta\} \Rightarrow |y(x) - B| < \varepsilon$

$|B| - |y(x)| \leq |B - y(x)| < \varepsilon$; $\exists\ \varepsilon = \frac{|B|}{2}$

$|B| - |y(x)| < \frac{|B|}{2}$; $-|y(x)| < -\frac{|B|}{2}$; $|y(x)| > \frac{|B|}{2}$

$\frac{1}{|y(x)|} < \frac{2}{|B|} \Rightarrow \frac{1}{B+\beta(x)} = \frac{1}{|y(x)|} < \frac{2}{|B|}$ – т.е. ограничен.

значит, произведение б.м. на огр. функцию – б.м. функция.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$;

43 Сумма беск. малой функции и ограниченной – ограниченная функция. $f(x)$ – ограниченная $\Rightarrow \forall x \in X\ \exists M > 0 : |f(x)| < M$; $\alpha(x)$ – б.м., т.е. $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$; $|f(x) + \alpha(x)| \leq |f(x)| + |\alpha(x)| < M + \varepsilon$

$\Leftrightarrow |f(x) + \alpha(x)| < M + \varepsilon \Rightarrow f(x) + \alpha(x)$ – ограниченная функция

44 Произведение двух ограниченных функций есть ограниченная функция.

$f(x)$ – ограниченная, $\forall x \in X\ \exists M > 0 : |f(x)| < M$;

$g(x)$ – ограниченная, $\forall x \in X\ \exists N > 0 : |g(x)| < N$;

$|f(x)\cdot g(x)| = |f(x)|\cdot|g(x)| < MN \Rightarrow f(x)\cdot g(x)$ – ограниченная ф-я.

45 Теорема о локальной ограниченности непрерывной функции. Если $f(x)$ непрерывна в т. a, то $\exists$ окрестность т. a, в которой $f(x)$ ограничена. //

По определению непрерывности: задарим $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ при $|x-a| < \delta$

т.е. $\underbrace{f(a)-\varepsilon}_{m} < f(x) < \underbrace{f(a)+\varepsilon}_{M}$ в δ-окрестности т. a

$\Rightarrow$ в δ-окрестности т. a $f(x)$ ограничена.

46 Теорема об устойчивости знака непрерывной функции
Если $f(x)$ положительна и непрерывна в т. a, то она остается положительной в нек. окрестности т. a.

$]$ $f(x)$ непрерывна в т. a и $f(a) > 0$. Возьмем $\varepsilon = f(a)$
По опр. непрерывности в точке $\exists \delta > 0 : |x-a| < \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
то есть $-f(a) < f(x) - f(a) < f(a)$, в δ окрестности т. a, как видно из последнего неравенства, $f(x) > 0$.

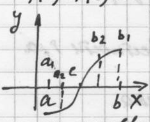
47 Теорема о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

$]$ $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, $f(a) = A$; $f(b) = B$. Тогда $\forall C \in [A;B]$ $\exists c \in [a;b] : f(c) = C$;

Рассмотрим $g(x) = f(x) - C$. $]$ для определенности $A < C < B$. Тогда $g(a) = f(a) - C < 0$; $g(b) = f(b) - C > 0$, т.к. $f(a) = A$, $f(b) = B$. Кроме того, $g(x)$ непрерывна на $[a;b]$ $\Rightarrow$ (по т. 48) $\exists c \in [a;b] : g(c) = 0$, т.е. $f(c) - C = 0$; $f(c) = C$;

48 Теорема о непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах отрезка.

Если $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$ и $f(a)\cdot f(b)<0$, то $\exists\, c\in(a;b):\ f(c)=0$



Отрезок $[a;b]$ разделим пополам. Выберем $[a_1;b_1]$, так, что $f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$ и т.д. Получим последовательность вложенных отрезков, к-е стягиваются в точку c, принадлежащую всем отрезкам одновременно.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, но $f(a_n)<0$ и $f(b_n)>0$. Перейдем к пределу:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f(c)\le 0\\ \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=f(c)\ge 0\end{cases} \Rightarrow f(c)=0.$$

49 Первая теорема Вейерштрасса

Непрерывная на сегменте функция ограничена на этом сегменте

] $f(x)$ не ограничена на этом сегменте, т.е. $\forall n\in N$ $\exists\, x_n\in[a;b]:\ |f(x_n)|>n$ (1). Рассмотрим $\{x_n\}$. Она ограничена $\Rightarrow$ из нее можно выделить сход. п/п.] $\{x_{k_n}\}\to c$. Т.к. все $x_{k_n}\in[a;b]$, то $c\in[a;b]$. По условию, $f(x)$ непрерывна и в точке c, поэтому $\{f(x_{k_n})\}\to f(c)$.

В силу (1) $|f(x_n)|>n \Rightarrow$ послед-ть бесконечно большая, с одной стороны, ее предел равен $f(c)$, с другой ∞. Полученное противоречие доказывает теорему.

50 Вторая теорема Вейерштрасса. Если $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$, то на $[a;b]$ она достигает своих точных граней.

] $M=\sup f(x)$, $x\in[a;b]$. Предположим, что функция не достигает наиб. значения, $f(x)<M$. Введем $\varphi(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$ она определена и непрер. на $[a;b]$. По I т. Вей-са она ограничена: $1/(M-f(x))<K$

$\Rightarrow f(x)<M-1/K$ (1) M – точная верхняя грань, она самая наименьшая. Нер-во (1) говорит о противоречии.

51 Объясните, в каком месте нарушается ход док-ва I т. Вейерштрасса, если в условии теоремы заменить сегмент на интервал.
В док-ве использовалось, что т.к. все $x_{k_n} \in [a;b]$, то $c \in [a;b]$. То есть т. c может быть равной $a+\varepsilon$, ε – б.м. >0, а в случае интервала точные верхние и нижние грани $\exists$, но не достигаются.

52 Теорема Кантора Непрерывная на сегменте $f(x)$ равномерно непрерывна на этом сегменте.
$]$ $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Допустим $f(x)$ не явл. равномерно непрерывной на сегменте. Тогда $\exists \varepsilon>0, \forall \delta>0$ $\exists x', x'' \in [a;b]: |x''-x'|<\delta$, $|f(x'')-f(x')| \geq \varepsilon$. Возьмем последовательность $\{\delta_k>0\} \to 0$. Согласно предположению $\forall \delta_n$ $\exists x_n', x_n'' \in [a;b]$

(1) $|x_n''-x_n'|<\delta_n$ (2) $|f(x_n'')-f(x_n')| \geq \varepsilon$

Рассмотрим $\{x_n'\}$, она ограничена $\Rightarrow$ можно выделить сходящ. п/п. $]$ $\{x_{k_n}'\} \to c$. В силу (1) $c \in [a;b]$.
Следовательно, $f(x)$ непрерывна в т. c. Поэтому:

$$\left.\begin{array}{l}\{f(x_{k_n}')\} \to f(c) \\ \{f(x_{k_n}'')\} \to f(c)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |f(x_{k_n}'') - f(x_{k_n}')| = 0$$

С другой стороны, в силу (2) $\lim |f(x_{k_n}'') - f(x_{k_n}')| \geq \varepsilon > 0$
Полученное противоречие доказывает теорему.

53
55 Теорема о достаточном условии возрастания (убывания) в точке X_0 функции $f(x)$, диф-ой в т. X_0

По определению производной:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}; \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ при}$$

при $0 < |x-c| < \delta$ $\left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c) \right| < \varepsilon$

$f'(c) - \varepsilon < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < f'(c) + \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = f'(c) > 0$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$ в δ-окрестности т. c $(x \neq c)$

$$\left.\begin{cases} f(x) > f(c) \text{ при } x > c \\ f(x) < f(c) \text{ при } x < c \end{cases}\right\} \text{в } \delta\text{-окр. т. } c,\ x \neq c.$$

$\Rightarrow f(x)$ возрастает в т. c, если $f'(c) > 0$.

Возьмем $f'(c) < 0$, например $f'(c) = -\varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0$ в δ-окрестност

$$\left.\begin{cases} f(x) > f(c) \text{ при } x < c \\ f(x) < f(c) \text{ при } x > c \end{cases}\right\} \text{в } \delta\text{-окр. т. } c,\ x \neq c$$

$f(x)$ убывает в т. c, если $f'(c) < 0$.

54
56 Теорема о необходимом условии возрастания (убывания) в точке x_0 функции $f(x)$, диф-ой в т. X_0

$\exists\ f(x) \uparrow$ в т. $x = c$ ($\downarrow$ в т. $x = c$), $\exists\ \delta$-окр. т. c, $x \neq c$

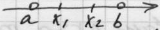
$f \uparrow \begin{cases} f(x) > f(c), & x > c \\ f(x) < f(c), & x < c \end{cases}$; $f \downarrow \begin{cases} f(x) < f(c), & x > c \\ f(x) > f(c), & x < c \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$ $\qquad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0.$

устремляя $x \to c$, перейдем к пределу:

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(x) > 0$; $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(x) < 0.$

57 Достаточное условие для убывания функции, диф-ой на $(a;b)$;



Применим ф-лу конечных приращений Лагранжа: $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$

$x_1<c<x_2$;

1) $f'(x)>0$, $f'(c)>0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow f\uparrow$
2) $f'(x)<0$, $f'(c)<0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)<0 \Rightarrow f\downarrow$

Это условие достаточное, но не необходимое, в нек. точках $f'(x)$ может обращаться в ноль, и f при этом будет строго $\uparrow$ или $\downarrow$.

58 Необходимое условие для убывания функции, диф-ой на $(a;b)$

Пусть $f(x)$ убывает на X, т.е. (1) $f(x_2)<f(x_1)$, $\forall\, x_2, x_1$: $x_2>x_1$. Требуется доказать, что $f'(x)<0$. Допустим, что это не так, т.е. $\exists$ т. $c\in X$: $f'(c)>0$, а значит по def $\exists$ δ-окрестность т. c:

$$f(x)>f(c)\quad \forall x>c$$
$$f(x)<f(c)\quad \forall x<c$$

// по ф-ле конечных приращений.

что противоречит (1)

59 Теорема о необходимом условии экстремума диф-мой функции

Если $f(x)$ имеет в т. c локальный максимум, т.е. $\exists$ окрестность точки c, в которой $f(x) < f(c)$ при $x \neq c$ (1). Допустим, что $f'(c) \neq 0$.] $f'(c) > 0$

Тогда в т. c $f(x)$ возрастает, $\Rightarrow \exists$ окрестность точки c, в которой $f(x) > f(c)$, что противоречит условию (1). Аналогично, $f'(c)$ не может быть < 0.

60 Теорема о достаточных условиях экстремума дважды диф-ой функции.

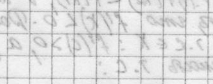
] в окрестности т. x_0 $f(x)$ имеет производную и т. x_0 – критическая точка, причем $f'(x_0) = 0$.

Если $f(x)$ в т. x_0 имеет вторую производную, то если $f''(x_0) > 0$, x_0 – $\min f(x)$, если $f''(x_0) < 0$, x_0 – $\max f(x)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0+\Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = f''(x_0)$$

] $f''(x_0) > 0$ в окрестности т. x_0. Если $\Delta x > 0$, то $f'(x_0+\Delta x) - f'(x_0) > 0$, $f'(x_0+\Delta x) > f'(x_0) = 0$

Если $\Delta x < 0$, то $f'(x_0+\Delta x) - f'(x_0) < 0$, $f'(x_0+\Delta x) < f'(x_0) = 0$



] $f''(x_0) < 0$ в окрестности т. x_0 Если $\Delta x > 0$, то $f'(x_0+\Delta x) - f(x_0) < 0$

$\Rightarrow f'(x_0+\Delta x) < f'(x_0) = 0$; Если $\Delta x < 0$, то $f'(x_0+\Delta x) - f'(x_0) > 0 \Rightarrow f'(x_0+\Delta x) > f'(x_0) = 0$.

61 Теорема о необходимых условиях перегиба дважды диф-ой функции

Если в точке $M(a; f(a))$ график функции имеет перегиб и в т. a $f(x)$ имеет непрерывную $f''(x)$, то $f''(a) = 0$

] $f''(a) \neq 0$] $f''(a) > 0$. Тогда в силу устойчивости знака непрерывной функции найдется окрестность т. a, в которой справа и слева от т. a $f''(x) > 0$, поэтому в этой окрестности справа и слева от точки a график направлен выпуклостью вниз, но это противоречит тому, что в т. M перегиб. Аналогично неравенство $f''(a) < 0$ невыполнимо. $\Rightarrow f''(a) = 0$.

62 Теорема о достаточных условиях перегиба дважды диф-ой функции

] т. $M(a; f(a))$ – точка возможного перегиба $f(x)$, и $f(x)$ дважды диф-ма в нек. проколотой окрестности т. a, причем $f''(x)$ имеет разные знаки справа и слева от точки a в указ. окрестности т. a. Тогда в т. M – перегиб

Т.к. $f''(x)$ имеет разные знаки справа и слева от т. a, то в этой окрестности справа и слева от т. a график имеет разные направления выпуклости, def $\Rightarrow$ M – точка перегиба.

63 Теорема о достаточных условиях перегиба трижды диф-ой функции:] $f(x)$ трижды диф-ма в т. a, $f''(a) = 0$; $f'''(a) \neq 0$, тогда M – т. перегиба

Т.к. $f'''(a) \neq 0$, то $f''(x)$ возрастает в т. a, если $f'''(a) > 0$ и убывает в т. $x = a$, если $f'''(a) < 0$. В любом случае, найдется окрестность т. a, в к-й справа и слева от т. a $f''(x)$ имеет разные знаки, ($\Rightarrow$ по т. 62) и следовательно, в т. M – перегиб

64 Докажите, если $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) на
65 промежутке $x \in (a;b)$, то $y = f(x)$ на этом промежутке направлен выпуклостью вверх (вниз)

$\exists$ $f''(x) \geq 0$. Ур-е касательной имеет вид:

$$y - f(c) = f'(c)(x-c), \text{ или } Y(x) = f(c) + f'(c)(x-c) \quad (1)$$

Докажем, что график $y = f(x)$ в пределах интервала $(a;b)$ лежит не ниже данной касательной т.е. $\forall x \in (a;b)$: $y = f(x) \geq Y(x)$. Возьмем $\forall x \in (a;b)$ и воспользуемся ф-ой Тейлора с ост. членом в форме Лагранжа (2) $y = f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\varepsilon)(x-c)^2}{2!}$, где $\varepsilon \in (c;x)$. Вычтем из (1) (2):

$$y - Y = \frac{f''(\varepsilon)}{2!}(x-c)^2; \quad y - Y \geq 0 \text{ в случае } f''(x) \geq 0$$
$$\text{и } y - Y \leq 0 \text{ в случае } f''(x) \leq 0$$

66 Докажите, что из любой ограниченной пос-ти можно выбрать сходящуюся подпос-ть.

$\exists$ $\{x_n\}$ - ограниченная п-ть т.е. $a \leq x_n \leq b$ $\forall n$; разделим сегмент $[a;b]$ пополам. По крайней мере на одной из половин сегмента $[a;b]$ лежат бесконечно много членов пос-ти $\{x_n\}$. Обозначим эту половину через $[a_1;b_1]$. Возьмем x_{k_1}: $a_1 < x_{k_1} < b_1$; разделим сегмент $[a_1;b_1]$ пополам и обозначим как $[a_2;b_2]$ половину с бесконечно большим числом членов последовательности $\{x_n\}$. Выберем $x_{k_2} \in [a_2;b_2]$ $k_2 > k_1$, $a_2 \leq x_{k_2} \leq b_2$. Разделим сегмент $[a_2;b_2]$ пополам и т.д. Получим стягивающуюся систему сегментов $[a_1;b_1] \ldots [a_n;b_n] \ldots$

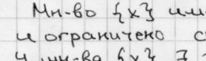
$b_n - a_n = 2^{-n}(b-a) \to 0$ при $n \to \infty$. По т. Кантора $\exists$ т.c: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

$$|x_{n_k} - c| \leq b_k - a_k = \frac{b-a}{2^n} \quad (*)$$

$k \to \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$, т.к. правая часть $(*) \to 0$

67 *Докажите, что ограниченная числовая последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Т.к. последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то $\exists$ вещ-ые m и M такие, что $x_n \in \{x_n\}$ удовл. $m \le x_n \le M$.
Рассм. мн-во $\{x\}$ веществ. чисел x: правее каждого из этих чисел либо нет элементов посл-сти $\{x_n\}$, либо конечное число элементов
Мн-во $\{x\}$ имеет хотя бы один элемент (напр. M) и ограничено снизу (любым числом $< m$), значит у мн-ва $\{x\}$ $\exists$ точная нижняя грань $(\bar{x})$
Докажем, что $\bar{x}$ - предельная точка $\{x_n\}$.
] $\varepsilon > 0$. Число $\bar{x}-\varepsilon$ - не принадлежит мн-ву $\{x\}$, поэтому правее $\bar{x}-\varepsilon$ лежит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$
По опр-ию точной нижней грани найдется x' из мн-ва $\{x\}$, удовлетвр. усл-ию: $\bar{x} \le x' < \bar{x}+\varepsilon$



По опр-ию мн-ва $\{x\}$ правее x' лежит не более чем конечное число элементов $\{x_n\}$. Значит на полусегменте $(\bar{x}-\varepsilon, x']$, а тем более и в ε-окрестности $\bar{x}$ сод-ся бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, т.е $\bar{x}$ - явл-ся предельной точкой $\{x_n\}$

68 Докажите эквивалентность определений предель-
69 ной точки последовательности через понятия окрестности и подпоследовательности.

Число a — предельная точка $\{x_n\}$, если из $\{x_n\}$ можно выделить $\{x_{n_k}\} \to a$; число a — пред. точка $\{x_n\}$, if в $\forall \varepsilon$ окрестности т. a содержится бесконечно много членов посл-ти $\{x_n\}$. По 1-му def $\exists \{x_{n_k}\} \to a$, и в $\forall$ ε-окрестности т. a содержится бесконечно много членов посл-ти $\{x_n\}$, а это значает, что т. a — предельная точка посл-ти по def (2)

Обратно: def 2 $\Rightarrow$ в $\forall$ ε-окр. т. a содержится бесконечно много членов $\{x_n\}$, и $\{x_n\}$ принадлежит $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, т.е. ограничена $\Rightarrow$ можно выделить сходящ. подпоследовательность.

$\Rightarrow$ определения (1) и (2) эквивалентны.

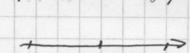
70. Доказать, что ограниченная посл-ть имеет верхний и нижний пределы.

$\exists \{x_n\}$ — огран. п-ть; A — множество ее предельных точек, ограниченное и непустое.

$\sup A = \overline{a}$; $\inf A = \underline{a}$. Осталось доказать, что $\overline{a}$ и $\underline{a}$ — предельные точки для $\{x_n\}$

Докажем это для $\overline{a}$. Рассмотрим ε-окрестность числа $\overline{a}$. Нужно показать, что в этой окрестности содержится бесконечно много членов $\{x_n\}$

т.к. $\overline{a} = \sup A$, то $\exists$ т. $c \in \{x_n\}$



$\overline{a} - \frac{\varepsilon}{2} \leq c \leq \overline{a}$ По определению предельной точки, в $\varepsilon/2$-окрестности т. c лежит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Т.к. $\{\frac{\varepsilon}{2}$ окр. т. $c\}$ содержится в ε-окр. т. $\overline{a}$, то и в ε-окрестности содержится бесконечно много членов $\{x_n\}$

71. Теорема об интегрировании по частям

Пусть ф-ции $u(x)$ и $v(x)$ опр-ны и диф-мы на промежутке X и пусть $v(x)u'(x)$ имеет первообразную на X, т.е. $\exists \int v(x)u'(x)$

Тогда $\exists \int u(x)v'(x)$ и справедливо рав-во:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx \quad (1)$$

$$\int u\,dv = u(x)v(x) - \int v\,du$$

Док-во: запишем ф-лу для производной

$$[u(x)v(x)]' = u(x)\cdot v'(x) + u'(x)\cdot v(x) \quad (1)$$

умножим (1) на dx и возьмём инт. от обеих частей. т.к. по усл. для всех X существует $\int v(x)u'(x)dx$, и $\int [u(x)v(x)]'dx = u(x)v(x) + C$, то для всех X существует интеграл $\int u(x)v'(x)\,dx$, причем справедлива ф-ла (1) (или (2))

ф-ла (2) — ф-ла интегрирования по частям.

72 Теорема об интегрировании заменой переменной

Пусть $x = \varphi(t)$ – опр-на и дифференцируема на промежутке T и пусть X – область её значений. Пусть на X $y = f(x)$, $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in X$.

Тогда $F(\varphi(t))$ – первообразная для $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ на T.

По правилу дифференцирования сложной ф-ции:

$\frac{d}{dt}[F(\varphi(t))]_t = F_x'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$; и

из усл-ия теоремы следует, что

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C = [F(x)+C]_{x=\varphi(t)}$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

доказанное утверждение позволяет сформулировать формулу

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

73. Теорема о необходимом условии сходимости ряда.

Для сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ необходимо, чтобы последовательность $u_1, u_2, u_3, \ldots$ членов этого ряда являлась бесконечно малой

достаточно док-ть, что для данного сходящегося ряда и $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 : n \geq N_0 \ |u_n| < \varepsilon$.
Пусть дано $\forall \underline{\varepsilon > 0}$, тогда найдётся такое N, что при $n \geq N$ и $\forall$ натур. p выполнялось нер-во (по критерию Коши для ряда):

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon, \text{ в частн. при } p=1: |u_{n+1}| < \varepsilon$$

(при $n \geq N$). Если теперь положить $N_0 = N+1$, то при $n \geq N_0$ получим $|u_n| < \varepsilon$, ч.т.д.

74. Признак Коши в „непредельной форме".

Если для всех номеров k или по крайней мере начиная с некоторого ном. k, справ. рав-во:

$\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1 \quad \left(\sqrt[k]{p_k} \geq 1\right), \quad (1)$

то ряд сходится (расходится).

<u>Док-во:</u> $I \ p_k' = q^k \ (p_k' = 1)$, тогда из нер-ва (1) получим:

$p_k \leq p_k' \quad (p_k \geq p_k'). \quad (2)$

Т.к. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k'$, совпадающий с $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1)\right)$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k = q + q^2 + q^3 + \ldots \ |q| < 1 \quad \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1) = 1+1+1+\ldots\right)$

сходиться, то нер-во (2) на осн. теоремы сравнения гарантирует сходимость (расходимость) ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$

75. Признак Коши в „предельной форме"

Если $\exists$ предел $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L$, (1)

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при $L<1$ и расх-ся при $L>1$.

Если $L<1$, то найдётся $\varepsilon>0$, такое что $L=1-2\varepsilon$ и $L+\varepsilon=1-\varepsilon$. По опр-ию посл-сти для ε найдётся такой н. N, что при $k\geq N$

$$L-\varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L+\varepsilon = 1-\varepsilon. \quad (2)$$

(Число $L+\varepsilon=1-\varepsilon$ играет роль q в т. „непр. ф.")

~~Если~~ Ряд сходится.

Если же $L>1$, то найдется $\varepsilon>0$, такое что $L=1+\varepsilon$ и $L-\varepsilon=1$. В этом случае на основании левого из нер-в (2), получим:

$$\sqrt[k]{p_k} > L-\varepsilon = 1 \quad (\text{при } k\geq N)$$

Ряд расходится на осн. т. в „непред. ф.".

76 Признак Даламбера в „непредельной форме"

Если для всех номеров k, или по крайней мере начиная с некоторого номера k, справедливо нерав-во $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$ $\left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1\right)$, (1)

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится)

$\exists\, p_k' = q^k$ $(p_k'=1)$. Тогда $\frac{p_{k+1}'}{p_k'} = q$ $(q<1)$ $\left(\frac{p_{k+1}'}{p_k'}=1\right)$

и мы можем переписать (1): $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{p_{k+1}'}{p_k'}$ $\left(\frac{p_{k+1}'}{p_k'} \geq \frac{p_{k+1}}{p_k}\right)$

т.к. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ – сходится $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1) - \text{расх-ся}\right)$,

то нер-во (1) гарантирует сходимость (расходимость)

77. Признак Даламбера в „предельной" форме

Если $\exists$ предел $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$, (1)

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при $L<1$ и расх-ся при $L>1$.

Док-во:

Если $L<1$, то найдётся $\varepsilon>0$ такое, что $L=1-2\varepsilon$ и $L+\varepsilon=1-\varepsilon$. По определению предела последовательности для указанного ε найдётся N такой, что при $k \geq N$.

$$L-\varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L+\varepsilon = 1-\varepsilon. \quad (2)$$

Число $L+\varepsilon=1-\varepsilon$ играет роль q в т. „непр.ф."

Ряд сходится.

Если $L>1$, то найдется $\varepsilon>0$ такое что $L=1+\varepsilon$ и $L-\varepsilon=1$. В этом случае на основании левого из нер-в (2) получим

$\frac{p_{k+1}}{p_k} > L-\varepsilon = 1$ [при $k \geq N$] Ряд расходится

N 1

По условию $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = \lim\limits_{x\to c+0} f(x) = A$, для $\forall c \in (a;b)$

По определению односторонних пределов:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_1 > 0 :\ 0 < c - x_1 < \delta_1 \Rightarrow A - f(x_1) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_2 > 0 :\ 0 < x_2 - c < \delta_2 \Rightarrow f(X_2) - A < \varepsilon$

Возьмём $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда из этих неравенств следует:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \ 0 < |c - x| < \delta \Rightarrow |A - f(x)| < \varepsilon$

Это означает, что $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A = \lim\limits_{x\to c-0} f(x) = \lim\limits_{x\to c+0} f(x)$, значит $f(x)$ непрерывна на $(a;b)$

N 2

$\{X_n\}$ - фундаментальная последовательность

I Существование следует из критерия Коши $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = A$, A - предельная точка

II Предположим $\exists B \neq A$ - предельная точка

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \{x_{k_n}\} = B$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1,\ \forall n > N_1,\ |X_n - A| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2,\ \forall k_n > N_2\ \ |X_{k_n} - B| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_3,\ \forall n, k_n > N_3\ \ |X_{k_n} - X_n| < \varepsilon$ (по определению фундаментал последоват.)

$N = \max(N_1, N_2, N_3)$

$2\varepsilon > |X_n - A| + |X_{k_n} - B| \geq |X_n - X_{k_n} - (A - B)| \geq$

$\geq |X_n - X_{k_n}| - |A - B| \geq \varepsilon - |A - B| \Rightarrow \begin{array}{l}|A - B| \leq 0, \\ A \equiv B\end{array}$

N 3

$x_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$; $\left|\frac{\ln n}{n^\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\ln n}{n^\alpha}\right| = \left|\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\ln n^\alpha}{n^\alpha}\right| \to 0$

т.к. $\frac{\ln n^\alpha}{n^\alpha} \to 0$ (см. задание N 8)

N 4

$x_n = \frac{n^\alpha}{b^n}$, $b>1$

$\frac{n^\alpha}{b^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[\alpha]{b^n}}\right)^\alpha$; $\sqrt[\alpha]{b} = a$, $a>1$

$\frac{n}{a^n} = \frac{n}{(1+(a-1))^n} = \frac{n}{1+\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2+\ldots+(a-1)^n} <$

$< \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}(n-1)(a-1)^2} = \frac{2}{(a-1)^2}\cdot\frac{1}{n-1}$

$\frac{1}{n-1} \to 0 \Rightarrow \frac{n}{a^n} \to 0 \Rightarrow \frac{n^\alpha}{b^n} \to 0$

N 5

$\forall b : \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$

Возьмём m, такое, что $m+1 > |b|$

$\left|\frac{b^n}{n!}\right| = \frac{|b|}{1}\cdot\frac{|b|}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{|b|}{m}\cdot\frac{|b|}{m+1}\cdot\ldots\cdot\frac{|b|}{n} <$

$< \left(\frac{|b|}{m!}\right)^m\cdot\left(\frac{|b|}{m+1}\right)^{n-m} \to 0$ т.к.

$\left(\frac{|b|}{m!}\right)^m = const$; $\frac{|b|}{m+1} < 1$

N 6

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{\left(\frac{n^n}{n!}\right)} \to 0$$
$$\left(\frac{n^n}{n!}\right) \to \infty$$

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} > \left(\frac{n}{2}\right)^n \to \infty, \text{ т.к.}$$

$\frac{n}{2} > 1$ при достаточно больших n

N 7

$$X_n = \frac{b^n}{n^2}; \ b > 1$$

$$\frac{b^n}{n^2} = \left(\frac{\sqrt[2]{b^n}}{n}\right)^2; \ a = \sqrt[2]{b}; \ a > 1$$

$$\frac{a^n}{n} = \frac{(1+(a-1))^n}{n} = \frac{1 + \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 + \ldots + (a-1)^n}{n} >$$

$$> \frac{\cancel{n}(n-1)(a-1)^2}{2\cancel{n}} = \frac{(a-1)^2}{2}(n-1) > M, \text{ при}$$

$$N = \left[\frac{2M}{(b-1)^2}\right] + 1 \Rightarrow \frac{a^n}{n} \to \infty \Rightarrow \frac{b^n}{n^2} \to \infty$$

~~N 8~~

~~$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, воспользуемся пределом~~

~~$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{b^n} = 0$, $b > 1$ (см. задание N 4)~~

~~$\alpha = 1$; $b = e \Rightarrow$~~

~~$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists N, \forall n > N: \frac{n}{e^n} < \varepsilon_1$~~

~~Т.к. ε_1 - любое, пусть $\varepsilon_1 = e^\varepsilon$~~

~~$\frac{n}{e^n}$~~

№ 8

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ воспользуемся $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{b^n} = 0$

(см. задание № 4)

$\frac{1}{b^n} < \frac{n}{b^n} < 1$; Положим $b = e^{\varepsilon}$ =>

$\frac{1}{e^{\varepsilon n}} < \frac{n}{e^{\varepsilon n}} < 1$; $1 < n < e^{\varepsilon n}$

Логарифмируем последнее неравенство:

$0 < \ln n < \varepsilon n$ =>

$0 < \frac{\ln n}{n} < \varepsilon$ при достаточно больших n

№ 9

$X_n = \sqrt[n]{n} - 1$

$n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n = 1 + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \ldots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n >$

$> \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$ =>

$\sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt[2]{\frac{2}{n-1}} \to 0$ => $X_n \to 0$

N 10

$$f(x) = \begin{cases} x\cdot(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Воспользуемся определением производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \Delta y = \Delta x (1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$\frac{\Delta x (1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}}{\Delta x} = (1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}} \to e \text{ при } \Delta x \to 0$$

Ответ: $f'(0) = e$

N 11

$$f(x) = \begin{cases} x^{x+1}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

По определению правой производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \Delta y = \Delta x^{\Delta x + 1}$$

$$\frac{\Delta x^{\Delta x+1}}{\Delta x} = \Delta x^{\Delta x} \to 1 \text{ при } \Delta x \to 0$$

Ответ: $f'(0+0) = 1$

N 12

$$f(x) = \begin{cases} x\cdot(1-x^2)^{ctg^2 x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \Delta y = \Delta x (1-\Delta x^2)^{ctg^2 \Delta x}$$

$$\frac{\Delta x (1-\Delta x^2)^{ctg^2 \Delta x}}{\Delta x} = e^{ctg^2 \Delta x \ln(1-\Delta x^2)} = e^{-\frac{\Delta x^2}{tg^2 \Delta x} + o(\Delta x^2)}$$

$$\to e^{-1} \text{ при } \Delta x \to 0$$

Ответ: $f'(0) = e^{-1}$

N 13

$$f(x) = \begin{cases} x^{1-2x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \Delta y = \Delta x^{1-2\Delta x}$$

$$\frac{\Delta x^{1-2\Delta x}}{\Delta x} = \Delta x^{-2\Delta x} = \frac{1}{(\Delta x^{\Delta x})^2} \to 1 \text{ при } \Delta x \to 0$$

Ответ: $f'(0+0) = 1$

N 14

$$f(x) = \begin{cases} x^{1+\sqrt{2x}}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \Delta y = \Delta x^{1+\sqrt{2\Delta x}}$$

$$\frac{\Delta x^{1+\sqrt{2\Delta x}}}{\Delta x} = \Delta x^{\sqrt{2\Delta x}} = e^{\sqrt{2\Delta x}\ln \Delta x} = e^{\sqrt{2}\sqrt{\Delta x}(\Delta x-1)+o(\Delta x)} \to$$

$$\to e^0 = 1 \text{ при } \Delta x \to 0$$

Ответ: $f'(0+0) = 1$

№ 15

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

При $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - x^2 \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

При $x = 0$ $f'(x)$ не определена

При $x = 0$: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\Delta y = \Delta x^2 \sin\frac{1}{\Delta x}$

$\frac{\Delta x^2 \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x} \to 0$ при $\Delta x \to 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ не существует (т.к. $\lim\limits_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$ - не существ)

в т. $x = 0$ разрыв II рода

Ответ:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

№ 16

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

При $x\neq 0$:

$$f'(x)=2x\cos\frac{1}{x}+x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}=2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$$

При $x=0$ $f'(x)$ не определена

При $x=0$ $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$; $\Delta y=\Delta x^2\cos\frac{1}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta x^2\cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\Delta x\cos\frac{1}{\Delta x}\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0$$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ – не существует (т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не сущ.) $\Rightarrow$ в т. $x=0$ разрыв $\text{II}^{\text{го}}$ рода

Ответ: $f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

№ 17

$$f(x)=\begin{cases} x^3\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

При $x\neq 0$:

$$f'(x)=3x^2\cos\frac{1}{x^2}+2x^3\sin\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^3}=3x^2\cos\frac{1}{x^2}+2\sin\frac{1}{x^2}$$

При $x=0$ $f'(x)$ не определена

При $x=0$: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$; $\Delta y=\Delta x^3\cos\frac{1}{\Delta x^2}$

$$\frac{\Delta x^3\cos\frac{1}{\Delta x^2}}{\Delta x}=\Delta x^2\cos\frac{1}{\Delta x^2}\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0$$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ – не существует (т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x^2}$ не сущ.)
в т. $x=0$ разрыв $\text{II}^{\text{го}}$ рода

Ответ: $f'(x)=\begin{cases} 3x^2\cos\frac{1}{x^2}+2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

N 18

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

При $x\neq 0$:

$$f'(x)=3x^2\sin\frac{1}{x^2}-2x^3\cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^3}=3x^2\sin\frac{1}{x^2}-2\cos\frac{1}{x^2}$$

При $x=0$ $f'(x)$ не определена

При $x=0$: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$; $\Delta y=\Delta x^3\sin\frac{1}{\Delta x^2}$

$$\frac{\Delta x^3\sin\frac{1}{\Delta x^2}}{\Delta x}=\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x^2}\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0$$

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ – не существует (т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x^2}$ не сущ.)

в т. $x=0$ разрыв $\text{II}^{\text{го}}$ рода

Ответ:

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2\sin\frac{1}{x^2}-2\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

N 19

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\sin(e^{-\frac{1}{x}}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

При $x\neq 0$:

$$f'(x)=2x\sin(e^{-\frac{1}{x}})+x^2\cdot e^{-\frac{1}{x}}\cos(e^{-\frac{1}{x}})\cdot\frac{1}{x^2}=$$
$$=2x\sin(e^{-\frac{1}{x}})+e^{-\frac{1}{x}}\cos(e^{-\frac{1}{x}})$$

При $x=0$ $f'(x)$ не определена

При $x=0$: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$; $\Delta y=\Delta x^2\sin(e^{-\frac{1}{\Delta x}})$

$$\frac{\Delta x^2\sin(e^{-\frac{1}{\Delta x}})}{\Delta x}=\Delta x\sin(e^{-\frac{1}{\Delta x}})\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0$$

$\lim\limits_{x\to 0-0}f'(x)$ – не сущ. (т.к. $\lim\limits_{x\to 0-0}e^{-\frac{1}{x}}\cos(e^{-\frac{1}{x}})$ не сущ.)

в т. $x=0$ разрыв $\text{II}^{\text{го}}$ рода

Ответ:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin(e^{-\frac{1}{x}})+e^{-\frac{1}{x}}\cos(e^{-\frac{1}{x}}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

N 20

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x};\quad \Delta y=e^{-\frac{1}{\Delta x^2}}$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{\Delta x^2}}}{\Delta x}=\frac{e^{-\frac{1}{\Delta x^2}}}{e^{\ln\Delta x}}=e^{-\frac{1}{\Delta x^2}-\ln\Delta x}=e^{\underset{\text{при } \Delta x\to 0}{-\frac{1}{\Delta x^2}-\Delta x+1+o(\Delta x)\to 0}}$$

Ответ: $f'(0)=0$

N 21

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\left|\frac{1}{x^3}\right|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x};\quad \Delta y=e^{-\left|\frac{1}{\Delta x^3}\right|}$$

$$\frac{e^{-\left|\frac{1}{\Delta x^3}\right|}}{\Delta x}=e^{-\left|\frac{1}{\Delta x^3}\right|-\ln\Delta x}=e^{\underset{\text{при } \Delta x\to 0}{-\left|\frac{1}{\Delta x^3}\right|-\Delta x+1+o(\Delta x)\to 0}}$$

Ответ: $f'(0)=0$

N 22

$f(x)$; $x \in [a;+\infty)$; $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$; $f(a) = b$

Док-во: По определению предела:

$\forall \varepsilon > 0, \exists A; \forall x > A \quad |f(x) - b| < \varepsilon$

Фиксируем значение A. На сегменте $[a;A]$ выполняются условия II теоремы Вейерштрасса. Значит $f(x)$ достигает точной верхней грани на этом сегменте.

ε сколь угодно малое $\Rightarrow$ эта верхняя грань больше точной верхней грани на промежутке $[A;+\infty)$

N 23

$f(x)$; $x \in [a;+\infty)$, $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, $f(a) = b$, $\exists c \in (a;+\infty)$: $f(c) < b$

Док-во: По определению предела:

$\forall \varepsilon > 0; \exists B; \forall x > B \quad |f(x) - B| < \varepsilon$

Фиксируем значение $A > B$ так, чтобы $c \in [a;A]$. На $[a;A]$ выполняются условия II теоремы Вейерштрасса. Значит $f(x)$ достигает точной нижней грани на этом сегменте.

ε сколь угодно малое $\Rightarrow$ эта нижняя грань меньше точной нижней грани на промежутке $[A;+\infty)$

№ 24

$$f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \; ; \; [1; +\infty)$$

$y=1$ - точная верхняя грань, т.к. $\forall x$; $f(x)<1$

$\forall x_1 ; \exists x_2 > x_1 ; 1 > f(x_2) > f(x_1)$

№ 25

$f(x) = \sin x$

$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n=2k \\ (-1)^k, & n=2k+1 \end{cases}, \quad k=0,1,2\dots$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \begin{cases} 0, & n=2k \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, & n=2k+1 \end{cases}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + R_{2n+1}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + R_{2n+1}(x)$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$ (остаточный член в форме Лагранжа)

$$|R_{2n+1}(x)| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0$$ при $n\to\infty$ для любого фиксированного x

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \sin x}$$

N 26

$f(x)=\cos x$

$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

$$f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ (-1)^k, & n=2k\end{cases},\ k=0,1,2\ldots$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}, & n=2k\end{cases}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+R_{2n+2}(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+R_{2n+2}(x)$$

$$R_{2n+2}(x)=\frac{\cos\left(\theta x+(2n+2)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$ (остаточный член в форме Лагранжа)

$$|R_{2n+2}(x)|\leq\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)}\to 0$$ при $n\to\infty$ $\forall$ фиксированного x

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=\cos x}$$

N 27

$f(x)=e^x$; $f^{(n)}(x)=e^x$; $f^{(n)}(0)=1$, $\forall n$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_{n+1}(x)$$

$R_{n+1}(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ (остаточный член в форме Лагранжа)

$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \to 0$ при $n\to\infty$ $\forall$ фиксиров. x

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x}$$

N 28

$f(x)=e^{-x}$; $f^{(n)}(x)=(-1)^n e^x$; $f^{(n)}(0)=(-1)^n$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x) =$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}+R_{n+1}(x)$$

$R_{n+1}(x)=\frac{(-1)^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$ (остаточный член в форме Лагранжа)

$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \to 0$ при $n\to\infty$ $\forall$ фикс. x

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}=e^n}$$

N 29

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \; ; \; f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + R_{n+1}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + R_{n+1}(x)$$

$$|R_{n+1}(x)| = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(1+\theta)^{n+2} \cancel{(n+1)!}} \cdot x^{n+1} =$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+2} \cdot \frac{1}{x} \to 0 \text{ при } n \to 0 \quad \forall \text{ фикс. } x$$

$$\left(\text{т.к. } 0 < \theta < 1 \text{ и } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{1+\theta x} < 1\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

N 30

$$f(x) = \ln(1+x) \; ; \; f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} x^n + R_{n+1}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot (-1)^n \cdot \frac{n!}{(1+\theta x)^n} = (-1)^n \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \to$$

$$\to 0 \text{ при } n \to \infty, \; \forall \text{ фикс. } x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$$

N 31

$f(x) = \arcsin x$, $f^{(n)}(0)$ - ?

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x f'(x)}{1-x^2} \Rightarrow$

$(1-x^2) f''(x) - x f'(x) = 0$

От полученного тождества берём $(n-2)$ производную согласно правилу Лейбница

$(1-x^2) f^{(n)}(x) - 2x(n-2) \cdot f^{(n-1)}(x) - (n-2)(n-3) f^{(n-2)} -$

$- x f^{(n-1)}(x) - (n-2) f^{(n-2)}(x) = 0$

Подставляем $x = 0$

$f^{(n)}(0) = (n-2)(n-3) f^{(n-2)} + (n-2) f^{(n-2)} = (n-2)^2 f^{(n-2)}(0)$

При $n = 2k$ $f^{(2k)}(0) = 0$

При $n = 2k+1$ $f^{(2k+1)} = [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2k+1]^2$

N 32

$f(x) = \operatorname{arctg} x$ $f^{(n)}(0)$ - ?

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x f'}{1+x^2} \Rightarrow$

$(1+x^2) f''(x) + 2x f'(x) = 0$

По ф-ле Лейбница берём $(n-2)$ производную

$(1+x^2) f^{(n)}(x) + 2(n-2) x f^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-3) f^{(n-2)}(x) +$

$+ 2x f^{(n-1)}(x) + 2(n-2) f^{(n-2)}(x) = 0$

Подставляем $x = 0$

$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2) f^{(n-2)}(0)$

При $n = 2k$: $f^{(2k)} = 0$

При $n = 2k+1$ $f^{(2k+1)} = (-1)^k (2k)!$

N 33

$f(x) = \sqrt{x}$ Возьмём $\forall x, y \in [1; +\infty)$

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq |x-y| < \varepsilon$$

$\delta = |x-y|$, $\varepsilon = \delta \Rightarrow f(x)$ равномерно непрерывна на интервале $[1; +\infty)$ по определению

N 34

$f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}$ Возьмём $\forall x, y \in [1; +\infty)$

$$|f(x) - f(y)| = |\operatorname{arctg} \sqrt[3]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[3]{y}| =$$

$$= \left|\operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}{1 + \sqrt[3]{xy}}\right| \leq \left|\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}{1 + \sqrt[3]{xy}}\right| \leq |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| \leq$$

$\leq |x-y| < \varepsilon$, для $\delta = \varepsilon$

Равномерно непрерывна на интервале $[1; +\infty)$ по определению

N 35

Док-во: из существования предела следует:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists A$, $\forall x > A$: $|f(A)| < \varepsilon$

1 На промежутке $[0; A]$ выполняется теорема Кантора $\Rightarrow f(x)$ равномерно непрерывна на $[0; A]$

2 Промежуток $[A; +\infty)$ возьмём $\forall x, y \in [A; +\infty)$

$|f(x)| < \varepsilon$; $|f(y)| < \varepsilon$ (из определения предела)

$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \varepsilon$, т.к. x и y любые, то мы можем зафиксировать $\delta = \varepsilon$ и брать x и y из условия $|x-y| < \delta$ т.е $f(x)$ на промежутке $[A; +\infty)$ равномерно непрерывна.

№36

Т.к. $f(x)$ имеет асимптоту, то

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad ; \quad \exists \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b$$

Из существования пределов:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \exists A_1, \forall x > A_1, \; \left| \frac{f(x)}{x} - k \right| < \varepsilon_1$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0, \exists A_2, \forall y > A_2 \; |f(y) - ky - b| < \varepsilon_2$

$A = \max(A_1, A_2)$

I $[0; A]$ - равн. непрерывна по Т. Кантора.

II $[A; +\infty)$

$\left|\frac{f(x)}{x} - k\right| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - kx| < \varepsilon \qquad (1)$

$\varepsilon > |f(y) - ky - b| \geq |f(y) - ky| - |b| \Rightarrow |f(y) - ky| < \varepsilon \quad (2)$

Из (1) и (2) получаем:

$|f(x) - f(y) - k(x-y)| \leq |f(x) - kx| + |f(y) - ky| < \varepsilon$

$|f(x) - f(y)| - |k(x-y)| \leq |f(x) - f(y) - k(x-y)| < \varepsilon$

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon + |k(x-y)|$

$\delta = \frac{\varepsilon}{k} \; ; \; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

что по определению означает что $f(x)$ равномерно непрерывна