ференциального уравнения Эйлера

100 Сформулировать теорему о согласовании параметра регуляризации в функционале А.И. Тихонова с погрешностью входных данных для построения регуляризирующего алгоритма решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

Теорема Пусть $f_\delta(x)$ - непрерывная на $[c,d]$, $\|f_\delta - \bar{f}\|_{L_2[c,d]} \le \delta$, $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$; $\bar{f}: A\bar{y} = \bar{f}$, где A - интегральный оператор с ядром $K(x,s)$, $x \in [c,d]$, $s \in [a,b]$, непрерывным по совокупности аргументов и замкнутым; $\bar{y}(x)$ непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция. Пусть параметр регуляризации удовлетворяет следующим требованиям: $\alpha(\delta)$: $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \le C$, $C > 0$

для любого $\delta \in (0, \delta_0]$. Тогда $y_\delta^{\alpha(\delta)} = \arg\min M^{\alpha(\delta)}[y]$ т.е. функция, на которой достигается минимум функционала Тихонова

$$M^\alpha[y] = \|Ay - f_\delta\|^2_{L_2[c,d]} + \alpha\left(\|y\|^2_{L_2[a,b]} + \|y'\|^2_{L_2[a,b]}\right), \alpha = \alpha(\delta)$$

обладает тем свойством, что $y_\delta^{\alpha(\delta)} \xrightarrow{C[a,b]} \bar{y}$ при $\delta \to 0$

1 Найти расстояние между функциями в пространстве $C[0,2]$

а) $y = 2\sin \pi x$ и $z = \cos \pi x$

$$\|2\sin\pi x - \cos\pi x\| = \max_{C[0,2]} |2\sin\pi x - \cos\pi x| =$$

$$= \max_{C[0,2]} \left| \sqrt{5}\left(\underbrace{\frac{2}{\sqrt5}}_{\cos\varphi}\sin\pi x - \underbrace{\frac{1}{\sqrt5}}_{\sin\varphi}\cos\pi x\right)\right| =$$

$$= \max_{C[0,2]} \left|\sqrt5 \sin(\pi x - \varphi)\right| = \sqrt5$$

б) $y = x^2$ и $z = 6x$

$$\|x^2 - 6x\| = \max_{C[0,2]} |x^2 - 6x|$$

$(x^2 - 6x)' = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow x^2 - 6x\big|_{x=3} = -9$

$\Rightarrow$ т.к. при $x = 2$ $x^2 - 6x\big|_{x=2} = -8$

при $x = 0$ $x^2 - 6x\big|_{x=0} = 0$

$-$ $+$

2 3

а на отрезке $[0,2]$ $x^2 - 6x$ убывает

$$\max_{C[0,2]} |x^2 - 6x| = 8$$

2 Найти расстояние между функциями в пространстве $L_2[0,1]$

а) $y = 3\cos\pi x$ и $z = \sin\pi x$

$$\|3\cos\pi x - \sin\pi x\| = \int_0^1 (3\cos\pi x - \sin\pi x)^2 dx =$$

$$= \int_0^1 (9\cos^2\pi x - 6\cos\pi x\sin\pi x + \sin^2\pi x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 (8\cos^2\pi x - 3\sin 2\pi x + 1)\, dx =$$

$$= \int_0^1 \left(4(\cos 2\pi x + 1) - 3\sin 2\pi x + 1\right) dx =$$

$$= 4\int_0^1 \frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\, d(2\pi x) + 5 - 3\int_0^1 \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\, d(2\pi x) =$$

$$= \frac{2}{\pi}(+\sin 2\pi x)\Big|_0^1 + 5 + \frac{3}{2\pi}(\cos 2\pi x)\Big|_0^1 = 5$$

б) $y = x^2$ и $z = x$

$$\|x^2 - x\| = \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\, dx = \overset{6/}{\frac{1}{5}} - \overset{15/}{\frac{1}{2}} + \overset{10/}{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{6 - 15 + 10}{30} = \frac{1}{30}$$

3. Найти нормы в пространстве $C[0,2]$

а) $y = 2\sin \pi x - \cos \pi x$

см 1 а)

б) $y = x^2 - 4x$

$$\|x^2-4x\| = \max_{C[0,2]} |x^2-4x|$$

$$(x^2-4x)' = 2x-4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x^2-4x\Big|_{x=2} = 4-8 = -4$$

$x^2-4x\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow$ т.к. на отрезке $[0,2]$

x^2-4x убывает, $\max\limits_{C[0,2]} |x^2-4x| = 4$

4. Найти нормы в пространстве $h[0,1]$

а) $y = 3\cos \pi x - \sin \pi x$

см 2а)

б) $y = x^3 - 1$

$$\|x^3-1\| = \int_0^1 (x^9 - 2x^3 + 1)\,dx = \frac{1}{10} - \frac{1}{2} + 1 =$$

$$= \frac{1-5+10}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

5. Найти характеристические числа и собственные функции $y = \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds$

а) $K(x,s) = \cos x \cdot \sin s \quad a=0,\ b=\pi$

$$y = \lambda\int_0^\pi \cos x \sin s\, y(s)\,ds = \lambda\cos x \underbrace{\int_0^\pi \sin s\, y(s)\,ds}_{a_1} = \lambda a_1 \cos x$$

$$a_1 = \lambda a_1 \int_0^\pi \cos x \sin x\,dx =$$

$$= \lambda a_1 \int_0^\pi \sin x\, d\sin x = \lambda a_1 \frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_0^\pi =$$

$$= \lambda a_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

б) $K(x,s) = \cos(x+s) \quad a=0 \quad b=\pi$

$$y = \lambda\int_0^\pi \cos(x+s)\,y(s)\,ds = \lambda\int_0^\pi(\cos x\cos s - \sin x \sin s)\cdot$$

$$\cdot y(s)\,ds = \lambda\cos x\underbrace{\int_0^\pi \cos s\, y(s)\,ds}_{a_1} - \lambda\sin x\underbrace{\int_0^\pi \sin s\, y(s)\,ds}_{a_2} =$$

$$= \lambda\cos x\, a_1 - \lambda \sin x\, a_2$$

$$a_1 = \int_0^\pi (\lambda\cos^2 x\, a_1)\,dx - \int_0^\pi(\lambda\sin x\cos x\, a_2)\,dx =$$

$$= \lambda a_1\int_0^\pi\left(\frac{\cos 2x + 1}{2}\right)dx = \frac{\lambda a_1}{4}\int_0^\pi \cos 2x\, d2x + \frac{\lambda a_1}{2}x\Big|_0^\pi =$$

$= \dfrac{\lambda a_1 \pi}{2} = a_1 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2}{\pi}}$ Аналогично из a_2 $\boxed{\lambda = -\frac{2}{\pi}}$

$\lambda = \frac{2}{\pi}$ a_1 любое, $a_2 = 0$

$\lambda = -\frac{2}{\pi}$ a_2 любое, $a_1 = 0$

$\lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}$ $a_1 = a_2 = 0$

в) $K(x,s) = \sin(x-s) \quad a=0 \quad b=2\pi$

$$y = \lambda\int_0^{2\pi}\sin(x-s)\,y(s)\,ds = \lambda\int_0^{2\pi}(\sin x\cos s - \cos x\sin s)\,y(s)\,ds =$$

$$= \lambda\sin x\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos s\, y(s)\,ds}_{a_1} - \lambda\cos x\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin s\, y(s)\,ds}_{a_2} =$$

$$= \lambda\sin x\, a_1 - \lambda\cos x\, a_2$$

$$a_1 = \lambda a_1\int_0^{2\pi}\sin x\cos x\,dx - \lambda a_2\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx =$$

$$= \frac{\lambda a_1}{4}\int_0^{2\pi}\sin 2x\, d2x - \lambda a_2\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2x + 1}{2}\,dx = -\lambda a_2 \pi \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{\pi}}$$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

Аналогично из a_2 $\boxed{\lambda = \frac{1}{\pi}}$

г) $K(x,s) = x+s \quad a=-1 \quad b=1$

$$y = \lambda\int_{-1}^{1}(x+s)y(s)ds = \lambda x\underbrace{\int_{-1}^{1}y(s)ds}_{a_1} + \lambda\underbrace{\int_{-1}^{1}s y(s)ds}_{a_2} =$$

$= \lambda x a_1 + \lambda a_2$

$$a_1 = \int_{-1}^{1}\lambda x a_1 dx + \int_{-1}^{1}\lambda a_2 dx = \frac{\lambda a_1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} + \lambda a_2 x\Big|_{-1}^{1} =$$

$= 2\lambda a_2$

$$a_2 = \int_{-1}^{1}\lambda x^2 a_1 dx + \int_{-1}^{1}\lambda a_2 x dx = \frac{\lambda a_1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} + \frac{\lambda a_2}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} =$$

$= \frac{2\lambda a_1}{3}$

$$\begin{cases} a_1 - 2\lambda a_2 = 0 \\ \frac{2\lambda}{3}a_1 - a_2 = 0 \end{cases} \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -2\lambda \\ \frac{2\lambda}{3} & -1 \end{vmatrix} = -1 + \frac{4\lambda^2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4\lambda^2}{3} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}x a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x C + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\right)C$

$\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\right)C$

6. Решить интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

а) $y(x) = \lambda\int_0^1 (x-1)y(s)ds + x$

Рассмотрим $y(x) = \lambda\int_0^1 (x-1)y(s)ds + x =$

$= \lambda\underbrace{\int_0^1 y(s)ds}_{a_1}\cdot(x-1) + x = \lambda(x-1)a_1 + x$

$$a_1 = \lambda a_1\int_0^1 (x-1)dx + \int_0^1 x dx = \frac{\lambda a_1}{2}(x-1)^2\Big|_0^1 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 =$$

$= \frac{\lambda a_1}{2} + \frac{1}{2} \qquad a_1\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \lambda = \frac{a_1 - \frac{1}{2}}{\frac{a_1}{2}} = \frac{2a_1 - \ldots}{a_1}$

$\lambda = 2$ – решений нет

$y = \underbrace{(2a_1 - 1)}_{C}(x-1) + x = C(x-1) + x$

б) $y(x) = \lambda\int_{-1}^{1} xs\,y(s)ds + 1$

$y(x) = \lambda x\underbrace{\int_{-1}^{1} s y(s) ds}_{a_1} + 1 = \lambda x a_1 + 1$

$$a_1 = \int_{-1}^{1}\lambda x^2 a_1 dx + \int_{-1}^{1} x dx = \frac{\lambda a_1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} =$$

$= \frac{2\lambda a_1}{3} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$

$y = \frac{3}{2}x a_1 + 1$

7. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0 \qquad y(0) = 0,\ y'(1) = 0$

$\rho(x) = 1 > 0,\ p(x) = 1 > 0 \qquad q(x) = 0 \qquad x \in [0,1]$

$\Rightarrow$ Все собственные значения действительны, причем

одно из них $\lambda=0$, а остальные - положительны
В случае $\lambda=\lambda_0=0$ имеем $y(x)=C_1 3x^3+C_2$ и, учитывая граничные условия получаем
$y_0(x)=0$

Пусть $\lambda>0$, тогда общее решение уравнения имеет вид $y(x)=C_1\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\cos\sqrt{\lambda}x$

$y(0)=0 \Rightarrow C_2=0$

$y'(1)=0 \quad y'=C_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x \Rightarrow C_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0$

$\Rightarrow \cos\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}=\frac{\pi}{2}+\pi n$

$\Rightarrow \lambda=\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2, \; n=1,2,3\ldots$

$y_n(x)=C\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)x$

5. б) $y''+\lambda y=0 \qquad y(0)=y(2\pi), \; y'(0)=y'(2\pi)$

$\rho(x)=1>0, \; p(x)=1>0 \quad q(x)\equiv 0 \quad x\in[0,2\pi]$

$\Rightarrow$ Все собственные значения действительные, причем одно из них $\lambda_0=0$, а остальные - положительны

В случае $\lambda=\lambda_0=0$ имеем $y(x)=C_1 3x^3+C_2$ и, учитывая граничные условия получаем

$C_2=C_1\cdot 2\pi+C_2 \Rightarrow C_1=0$

$\Rightarrow y_0(x)=C$

Пусть $\lambda>0$, тогда общее решение уравнения имеет вид $y(x)=C_1\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\cos\sqrt{\lambda}x$

$y(0)=y(2\pi) \qquad \cos 2\pi\sqrt{\lambda}=1$

$y'=C_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x-C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x$

$y'(0)=y'(2\pi) \qquad \cos 2\pi\sqrt{\lambda}=1$

$\Rightarrow 2\pi\sqrt{\lambda}=2\pi n \Rightarrow \sqrt{\lambda}=n \Rightarrow \lambda=n^2$

$y_n(x)=C_1\sin nx+C_2\cos nx$

8. Доказать, что все собственные значения λ задачи Штурма-Лиувилля $(p(x)y')'-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0$ $(x\in(a,b)$, $p(x)>0$, $q(x)\geq 0$, $\rho(x)>0)$ положительны при следующих граничных условиях:

а) $y'(a)=0 \qquad y(b)=0$

б) $y'(a)=0 \qquad y'(b)=0$ (λ - неотрицательны)

а,б) $\int_a^b([(p(x)y']'-q(x)y)y(x)dx = p(x)y'y\Big|_a^b-\int_a^b p(x)y'^2(x)dx-$

$-\int_a^b q(x)y^2(x)dx=-\lambda\int_a^b\rho(x)y^2(x)dx$

$$\Rightarrow \lambda\underbrace{\int_a^b\rho(x)y^2(x)dx}_{>0 \text{ т.к. } \rho(x)>0 \text{ при } y\neq 0}=\underbrace{\int_a^b p(x)y'^2(x)dx}_{>0,\text{ если } y\neq const;\; =0,\text{ если } y=const}+\underbrace{\int_a^b q(x)y^2(x)dx}_{\geq 0}-$$

$$-\underbrace{p(b)y'(b)y(b)}_{=0}+\underbrace{p(a)y'(a)y(a)}_{=0}$$

Если $y(x)\neq const$, то правая часть равенства $>0 \Rightarrow$

Если $y(x)\equiv const$ а) из гран. услов. $y\equiv 0$ противоречит $y\neq 0$
б) из получ. выраж. либо $y=0$, но либо $y\geq 0$, тогда $\lambda>0$

9. Записать интегральное уравнение Фредгольма, эквивалентное задаче Штурма-Лиувилля:

а) $y''+\lambda(1+x^2)y=0 \qquad y(0)=0, \; y(1)=0$

$Ly=y''$, $p(x)=1>0$, $q(x)\equiv 0$, $\rho(x)=1+x^2>0$, $x\in[0,1]$

Докажем, что $\lambda=0$ не является собственным значением рассматриваемой задачи Шт-Л., т.е. однородное уравнение $Ly=y''=0$ с условиями $y(0)=0$, $y(1)=0$ имеет только тривиальное решение. Действительно, $y(x)=C_1x+C_2$, откуда с учетом дополнительных условий получаем $y(x)\equiv 0$. Это означает, что функция Грина оператора $Ly\equiv y''$ при условиях $y(0)=0$, $y(1)=0$ существует и, следовательно, задача Шт.-Л. может быть сведена к интегральному уравнению.

Построив функцию Грина $G(x,s)=\begin{cases}x(s-1), & 0\le x\le s\\ s(x-1), & s\le x\le 1\end{cases}$

и рассматривая выражение $-\lambda(1+x^2)y$ как неоднородность, приведем уравнение к виду $y(x)=\lambda\int_0^1 -G(x,s)(1+s^2)y(s)ds$

Чтобы симметризировать ядро умножим последнее соотношение на $\sqrt{1+x^2}$ и введем в рассмотрение функцию $\varphi(x)=y(x)\sqrt{1+x^2}$. Тогда получим $\varphi(x)=\lambda\int K(x,s)\varphi(s)ds$ - интегральное уравнение Фредгольма с непрерывным симметричным ядром $K(x,s)=-\sqrt{1+x^2}\,G(x,s)\sqrt{1+s^2}$ для функции $\varphi(x)$

б) $y''+\lambda e^{2x}y=0 \quad y(0)=0, \; y'(1)=0$

$G(x,s)=\begin{cases}-x, & 0\le x\le s\\ -s, & s\le x\le 1\end{cases}$

$K(x,s)=-e^x G(x,s)e^s$

10 Найти вариацию функционала:

а) $V[y]=\int_a^b (x+y)dx$

Найдем сначала слабую вариацию функционала $V[y]$

$\delta V(y,h)=\frac{d}{dt}V[y+th]\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\int_a^b (x+y+th)dx\Big|_{t=0}=$
$=\int_a^b h\,dx$

Найдем сильную вариацию: зададим приращение аргумента функционала - произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(x)$: $h(a)=h(b)=0$, и вычислим приращение $\Delta V=V[y+h]-V[y]=$
$=\int_a^b (x+y+h)dx-\int_a^b (x+y)dx=\int_a^b h\,dx = dV[y,h]$

б) $V[y]=\int_a^b (y^2-y'^2)dx$

$\delta V(y,h)=\frac{d}{dt}V[y+th]\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\int_a^b((y+th)^2-(y'+$
$=\int_a^b(2yh-2y'h')dx$

$\Delta V=V[y+h]-V[y]=\int_a^b((y+h)^2-(y'+h')^2)dx-$
$-\int_a^b(y^2-y'^2)dx=\int_a^b(2yh+h^2-2y'h'-h'^2)dx$

линейная часть относительно h и есть $dV[y,$

$\Rightarrow dV[y,h]=\int_a^b(2yh-2y'h')dx$

11 Найти экстремали функционала $V[y]=$
$=\int_0^{\pi/2}(y^2-y'^2)dx$ с условиями $y(0)=0$, $y(\frac{\pi}{2})=1$

Ур-ние Эйлера $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ для данного функционала имеет вид

$$y'' + y = 0$$

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$y(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$

$\Rightarrow y = \sin x$ - экстремаль

12. Записать условие трансверсальности в задаче поиска экстремума функционала $V[y] = \int_a^{b=B[y]} (x+y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$, считая, что левый конец закреплен, а правый - подвижен.

Условие трансверсальности $F + (\varphi' - y')F_{y'} = 0$ при $x = x_0 = B[y]$ в данной задаче имеет вид

$$(x+y)\sqrt{1+y'^2} + (\varphi' - y')\frac{(x+y)y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

или $$\frac{(x+y)(1+\varphi' y')}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

Так как $x + y \neq 0$, то $1 + y'\varphi'\big|_{x=x_0} = 0$ или $y'(x_0) = -\frac{1}{\varphi'(x_0)}$

13. Записать необходимое условие экстремума функционала $V[y] = \int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2]dx$ в изопериметрической задаче $J[y] = \int_a^b \rho(x)y^2 dx = 1$ $y(a) = 0$, $y(b) = 0$, где $p(x)$ непрерывно дифференцируемая, $q(x)$ и $\rho(x)$ непрерывные на $[a,b]$ функции.

Пусть 1) $y(x)$ реализует экстремум функционала $V[y] = \int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2]dx$ и дважды непрерывно дифференцируема; 2) ф-ции $[p(x)y'^2 + q(x)y^2]$ и $\rho(x)y^2$ непрерывны вместе со своими производными до второго порядка включительно. Тогда $\exists$ $\lambda = const$ такое, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера для функционала:

$$\int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + \lambda\rho(x)y^2]dx$$

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$2q(x)y + 2\lambda\rho(x)y - \frac{d}{dx}[2p(x)y'] = 0$$

$$q(x)y + \lambda\rho(x)y - p'(x)y' - p(x)y'' = 0$$

14. Записать необходимое условие экстремума функционала $V[y,z] = \int_a^b F(x,y,z,y',z')dx$ в задачах со связями

а) $V[y,z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2)dx$ $y^2 + z^2 = 1$, $y(0) = 1$ $z(0) = 0$, $y(1) = 0$ $z(1) = 1$

$$\int_0^1 [y'^2 + z'^2 + \lambda(x)(y^2 + z^2 - 1)]dx$$

$$\begin{cases} 2\lambda(x)y - 2y'' = 0 \\ 2\lambda(x)z - 2z'' = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \lambda(x) = \frac{y''}{y} \\ \lambda(x) = \frac{z''}{z} \end{matrix} \Rightarrow \frac{y''}{y} = \frac{z''}{z}$$