№1 Найти расстояние между функциями в пространстве $C[0,2]$

а) $y = 2\sin\pi x$, $z = \cos\pi x$

$$\rho(y,z) = \|y-z\| = \|2\sin\pi x - \cos\pi x\| = \max_{x\in[0,2]} |2\sin\pi x - \cos\pi x| =$$

$$(2\sin\pi x - \cos\pi x)' = 2\pi\cos\pi x + \pi\sin\pi x = 0$$

$$2\cos\pi x = -\sin\pi x \qquad \operatorname{tg}\pi x = -2$$

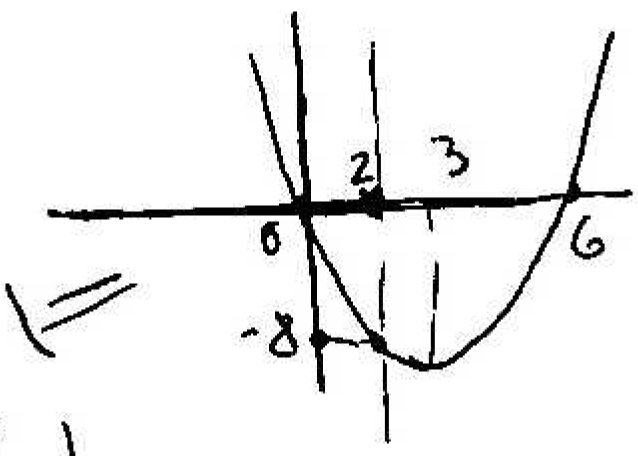
$$x_{max} = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(-2) \to \|y\| = |2\sin(-\operatorname{arctg}(-2)) - \cos(-\operatorname{arctg}(-2))| = \boxed{\sqrt{5}}$$

б) $y = x^2$, $z = 6x$

$$\rho(y,z) = \|y-z\| = \|x^2 - 6x\| = \max_{x\in[0,2]}$$

$$(x^2-6x)' = 2x - 6 = 0 \qquad x_{max} = 3$$

$$\|x^2 - 6x\|$$



$$|y_{max}| = 8 = \|y-z\|$$

№2 Найти расстояние между функциями в пр-ве $h[0,1]$

а) $y = 3\cos\pi x$ $\quad z = \sin\pi x$

$$\rho(y,z) = \|y-z\| = \sqrt{\int_a^b (y-z)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 (3\cos\pi x - \sin\pi x)^2 dx} =$$

$$\int\ldots = \int_0^1 (9\cos^2\pi x + \sin^2\pi x - 6\cos\pi x\sin\pi x)dx =$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^1 (\cos 2\pi x + 1)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - \cos 2\pi x)dx + \frac{6}{\pi}\int_0^1 \cos\pi x \, d\cos\pi x =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{\sin 2\pi x}{2\pi} + x\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\right)\Big|_0^1 + \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos^2\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5 \qquad \boxed{\|y-z\| = \sqrt{\int\ldots} = \sqrt{5}}$$

№3 Найти нормы в пространстве $C[0,2]$.

а) $y = 2\sin\pi x - \cos\pi x$ $\quad \|y\| = \max_{x\in[0,2]} |2\sin\pi x - \cos\pi x| = \boxed{\sqrt{5}}$ (см. №1(а))

б) $y = x^2 - 4x$ $\quad \|y\| = \max_{x\in[0,2]} |x^2 - 4x|$

$$(x^2-4x)' = 2x - 4 = 0 \to x_{max} = 2 \to |y_{max}| = \boxed{4 = \|y\|}$$

№10 Найти вариацию функционала.

а) $V[y] = \int_a^b (x+y)\,dx$

$\delta V(y_0,h) = \frac{d}{dt} V[y_0 + t h(x)]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_a^b (x+y_0+t h(x))\,dx\Big|_{t=0} =$

$= \underbrace{\int_a^b h(x)\,dx}$ – слабая вариация

$V[y_0+h] - V[y_0] = \int_a^b (x+y_0+h(x))\,dx - \int_a^b (x+y_0)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx$ сильная вариация.

б) $V[y] = \int_a^b (y^2 - y'^2)\,dx$

$\delta V(y_0,h) = \frac{d}{dt} V[y_0+th]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_a^b ((y_0+th)^2 - (y_0'+th')^2)\,dx\Big|_{t=0} =$

$= \frac{d}{dt}\int_a^b (y_0^2 + 2y_0 t h + t^2 h^2 - y_0'^2 - 2y_0' t h' - t^2 h'^2)\,dx\Big|_{t=0} =$

$= \int_a^b (2y_0 h - 2y_0' h' + 2t h - 2t h'^2)\,dx\Big|_{t=0} = \underbrace{2\int_a^b (y_0 h - y_0' h')\,dx}$

№11 Найти экстремали функционала $V[y] = \int_0^{\pi/2} (y^2 - y'^2)\,dx$ с условиями $y(0)=0$ $y(\pi/2)=1$

$F(x,y,y') = y^2 - y'^2$

Условие экстремали (ур-е Эйлера): $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$

$2y + 2y'' = 0 \qquad y'' + y = 0$

$y = C_1\cos x + C_2\sin x$

$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 = 0 \\ y(\pi/2) &= C_2 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{y_0 = \sin x}$ – экстремаль.

№12 Записать уравнение трансверсальности в задаче поиска экстремума функционала $V[y] = \int_a^{b=\varphi[y]} (x+y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$ считая что левый конец закреплён, а правый подвижен.

Условие трансверсальности: $[F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x = x_0 = B[y]} = 0$

$$F = (x+y)\sqrt{1+y'^2}$$

$$(x+y)\sqrt{1+y'^2} + (\varphi' - y')\frac{(x+y)\,y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

№13 Записать необходимое условие экстремума функционала в изопериметрической задаче.

$V[y] = \int_a^b (p(x)y'^2 + q(x)y^2)\,dx \qquad J[y] = \int_a^b \rho(x)\,y^2\,dx = 1$

$y(a) = 0$, $y(b) = 0$, $p(x)$ - непр. дифф, $q(x)$, $\rho(x)$ - непр. на $[a,b]$.

$F(x,y,y') = p(x)y'^2 + q(x)y^2 \qquad G^{(x,y,y')} = \rho(x)y^2$

1) На ф-ии $y(x)$ достигается экстремум функционала $V[y]$ при данных граничных условиях и условиях связи ($y(x)$ ищется из ур-я Эйлера: $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$)

2) Ф-ия F трижды дифференцируема.

3) $y(x)$ дважды дифференцируема и не является экстремалью функционала $J[y]$.

Тогда $\exists\ \lambda$ такое что при $H \equiv F(x,y,y') + \lambda G(x,y,y')$ $y(x)$ удовлетворяет ур-ю Эйлера для функционала

$$\int_a^b H(x,y,y')\,dx$$

№14 Записать необходимое условие экстремума функционала $V[y,z] = \int_a F(x,y,z,y',z')\,dx$ в задачах со связями

а) $V[y,z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2)\,dx$, $y^2+z^2=1$ $y(0)=1$, $y(1)=0$, $z(0)=0$ $z(1)=1$

$\Phi = y^2+z^2-1$ - голономная связь (не зависит от y', z')

$F = y'^2+z'^2$

Запишем ур-е Эйлера для $y(x), z(x)$:

$$\begin{cases} (F_y + \lambda \Phi_y) - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \\ (F_z + \lambda\Phi_z) - \frac{d}{dx}F_{z'} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - 2\lambda y = 0 \\ z'' - 2\lambda z = 0 \end{cases}$$ при $y(0)=1$ $y(1)=0$, $z(0)=0$ $z(1)=1$

(уравнение для нахождения экстремали $y(x), z(x)$), тогда если:

1) $y(x), z(x)$ - дважды непрерывно дифференцируемы

2) F непрерывна со своими частными производными до 2-го порядка включительно.

3) Φ непрерывна со своими частными производными, причём $\Phi_z \neq 0$

то $\exists$ непрерывная ф-ия $\lambda(x)$, такая что $y(x), z(x)$ удовлетворяют системе Эйлера.

б) $V[y,z] = \int_0^\pi (y'^2 - z'^2)\,dx$ $y' = \sin x - z$ $y(0)=0$, $y(\pi)=0$, $z(0)=0$, $z(\pi) = \pi/2$

$\Phi = y' - \sin x + z$ - неголономная связь

$F = y'^2 - z'^2$

1) Пусть $y(x), z(x)$ осуществляют экстремум $V[y,z]$ в задаче с данными связями и граничными условиями причём $y(x), z(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$

2) F, Φ имеют непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно причём $\Phi_{z'} \neq 0$.

Тогда существует дифф. ф-ия $\lambda(x)$, такая что $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют системе ур-ий Эйлера:

$$\begin{cases} F_y + \lambda\Phi_y - \frac{d}{dx}(F_{y'} + \lambda\Phi_{y'}) = 0 \\ F_z + \lambda\Phi_z - \frac{d}{dx}(F_{z'} + \lambda\Phi_{z'}) = 0 \end{cases}$$

при данных начальных граничных условиях и условиях связи.

№4 Найти нормы в пространстве $L[0,1]$

а) $y = 3\cos\pi x - \sin\pi x \qquad \|y\| = \sqrt{\int_0^1 (3\cos\pi x - \sin\pi x)^2 dx} = \underline{\sqrt{5}}$

(см. №2(а))

б) $y = x^3 - 1 \qquad \|y\| = \sqrt{\int_0^1 (x^3-1)^2 dx}$ *

* $\int_0^1 (x^3-1)^2 dx = \int_0^1 (x^6 - 2x^3+1)dx =$

$= \left(\frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{7} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{14} \qquad \underline{\|y\| = \sqrt{\int\ldots} = \frac{3}{\sqrt{14}}}$

№5 Найти характеристические числа и собственные функции $y = \lambda \int_a^b k(x,s)y(s)ds$

а) $k(x,s) = \cos x \sin s, \quad a=0, \quad b=\pi$

$y(x) = \lambda \int_0^\pi \cos x \sin s \, y(s) ds$

$c = \int_0^\pi \sin s \, y(s) ds \quad \to \quad y(x) = \lambda c \cos x$

$c = \int_0^\pi \sin s \, \lambda c \cos s \, ds = \lambda c \int_0^\pi \sin s \, d\sin s =$

$= \frac{\lambda c \sin^2 s}{2}\Big|_0^\pi = 0 \Rightarrow$ (характеристических чисел и собственных функций) нет

б) $k(x,s) = \cos(x+s) \qquad a=0, \quad b=\pi$

$y(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(x+s) y(s) ds = \lambda \int_0^\pi (\cos x \cos s - \sin x \sin s) y(s) ds$

$c_1 = \int_0^\pi \cos s \, y(s) ds \qquad c_2 = \int_0^\pi \sin s \, y(s) ds$

$y(x) = \lambda c_1 \cos x - \lambda c_2 \sin x$

$c_1 = \int_0^\pi \lambda c_1 \cos^2 s \, ds - \underbrace{\int_0^\pi \lambda c_2 \sin s \cos s \, ds}_{0} = \lambda c_1 \int_0^\pi \frac{\cos 2s + 1}{2} ds = \left(\lambda c_1 \frac{\sin 2s}{4} + \frac{s}{2}\right)\Big|_0^\pi =$

$= \lambda c_1 \frac{\pi}{2} = c_1 \to \underline{\lambda_1 = \frac{2}{\pi}}, \qquad \underline{y_1 = \frac{2}{\pi} c_1 \cos x}$

$c_2 = \int_0^\pi \lambda c_1 \cos s \sin s \, ds - \int_0^\pi \lambda c_2 \sin^2 s \, ds =$ (аналогично) $= -\frac{\pi}{2} c_2 \lambda$

$\underline{\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}}, \qquad \underline{y_2 = \frac{2}{\pi} c_2 \sin s}$

№6 Решить интегральное ур-е Фредгольма 2-го рода

а) $y(x) = \lambda \int_0^1 (x-1) y(s)\, ds + x$

$C = \int_0^1 y(s)\, ds$

$y(x) = \lambda C (x-1) + x$

$C = \lambda \int_0^1 C(s-1)\, ds + \int_0^1 s\, ds = \lambda\left(\frac{Cs^2}{2} - Cs\right)\Big|_0^1 + \frac{s^2}{2}\Big|_0^1 =$

$= -\frac{C\lambda}{2} + \frac{1}{2}$

$\lambda_{одн} = -2$. При $\lambda = -2$ - решений нет

при $\lambda \neq -2$:

$C\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow C = \frac{1}{2+\lambda}$

$y(x) = \lambda C(x-1) + x = \frac{\lambda(x-1)}{2+\lambda} + x = \boxed{\frac{2x(\lambda+1) - \lambda}{2+\lambda}}$

б) $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 xs\, y(s)\, ds + 1$

$C = \int_{-1}^1 s\, y(s)\, ds$

$y = \lambda C x + 1$

$C = \lambda \int_{-1}^1 Cs^2\, ds + \int_{-1}^1 s\, ds = \frac{\lambda C s^3}{3}\Big|_1^{-1} + \frac{s^2}{2}\Big|_{-1}^1$

$C = \frac{2}{3}\lambda C$ при $\lambda = 3/2$ - решений нет

при $\lambda \neq \frac{3}{2}$ $C = 0$ $\boxed{y = 1}$ - решение

(№7) Найти собственные значения и собственные ф-ции задачи Штурма-Лиувилля

а) $y''+\lambda y=0 \quad y(0)=0 \quad y'(1)=0$

$k^2+\lambda=0$

$k=\pm\sqrt{-\lambda}$

$y=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

1. $\lambda=-\delta^2\ (\lambda<0)$

$y=C_1e^{\delta x}+C_2e^{-\delta x}$

$\left.\begin{array}{l} y(0)=C_1+C_2=0 \Rightarrow C_1=-C_2 \\ y'(1)=C_1\delta e^{\delta}-C_2\delta e^{-\delta}\Rightarrow C_1=C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1=C_2=0$ Нет собственных значений.

2. $\lambda=0$

$y=C_1x+C_2$ (подставить в нач. ур-е $\lambda=0$)

$C_1=C_2=0$ Нет собственных значений.

3. $\lambda>0$

$y=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$

$y(0)=C_1=0$

$y'(1)=C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\cdot 1=0$

$C_2=0$

либо

$\sqrt{\lambda}=(\pi/2+\pi n)\to \lambda=(\pi/2+\pi n)^2$ – с.з. $\quad y_n(x)=C\cos(\frac{\pi}{2}+\pi n)x$ – с.ф.

б) $y''+\lambda y=0 \quad y(0)=y(2\pi) \quad y'(0)=y'(2\pi)$

1. $\lambda=-\delta^2$

$y=C_1e^{\delta x}+C_2e^{-\delta x}$

$y(0)-y(2\pi)=C_1(1-e^{\delta x})-C_2(1-e^{-\delta x})=0 \Rightarrow C_1=C_2=0$ Нет. с.з.

2. $\lambda=0$

$y=C_1x+C_2$

$\left.\begin{array}{l} y(0)-y(2\pi)=C_2-2\pi C_1-C_2=0 \Rightarrow C_1=0 \\ y'(0)-y'(2\pi)=C_2-C_2=0 \Rightarrow C_2\ \forall \end{array}\right\} \begin{array}{l}\lambda=0 \text{ – с.з.} \\ y=C \text{ – с.ф.}\end{array}$

3. $\lambda>0 \quad y=C_1\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\cos\sqrt{\lambda}x$

$\left.\begin{array}{l} y(0)-y(2\pi)=C_2-C_2\cos\sqrt{\lambda}2\pi-C_1\sin\sqrt{\lambda}2\pi=0 \\ y'(0)-y'(2\pi)=\sqrt{\lambda}(C_1-C_1\cos\sqrt{\lambda}2\pi+C_2\sin\sqrt{\lambda}2\pi)=0 \end{array}\right\} 2\cos\sqrt{\lambda}2\pi-2=0$

есть две независимые с.ф.: при $\lambda=n^2$ где $n=1,2,\dots$

$y_1=C\sin nx \quad y_2=C\cos nx$

№8 Доказать, что все собственные значения λ задачи Штурма - Лиувилля $(p(x)\cdot y')' - q(x)y + \lambda\rho(x)\cdot y = 0$ $(x \in (a,b),\ p(x)>0,\ q(x)\geq 0,\ \rho(x)>0)$ положительны при следующих граничных условиях:

а) $y'(a) = 0 \quad y(b) = 0$

$$(p(x)\cdot y')' - q(x)y + \lambda\rho(x)\cdot y = 0 \ \Big| \cdot y(x)$$

$$+\lambda\int_a^b \underbrace{\rho(x)y^2(x)dx}_{>0} = \int_a^b (((p(x)y')' - q(x)y)y(x)dx = \underbrace{-p(x)y'y\Big|_a^b}_{=0\ (\text{из гр. усл})} +$$

$$+\int_a^b \underbrace{p(x)y'^2(x)dx}_{>0} + \int_a^b \underbrace{q(x)y^2(x)dx}_{\geq 0} \Rightarrow \underline{\lambda>0}$$

б) $y'(a) = 0 \quad y'(b) = 0$ – аналогично предыдущему пункту.

№9 Записать интегральное уравнение Фредгольма эквивалентное задаче Штурма - Лиувилля.

а) $y'' + \lambda(1+x^2)y = 0 \qquad y(0)=0 \quad y(1)=0$

$Ly = y'' \quad (Ly = (p(x)y')' - q(x)y) \quad p(x)=1,\ q(x)=0$

$\rho(x) = 1+x^2 \quad x\in[0,1]$

$$G(x,s) = \begin{cases} s(x-1) & x\in[0,s) \\ x(s-1) & x\in[s,1] \end{cases}$$

тогда $y(x) = -\lambda\int_a^b G(x,s)\rho(s)y(s)ds$

$$\underline{y(x) = -\lambda\int_0^1 G(x,s)(1+s^2)y(s)ds}$$

б) $y'' + \lambda e^{2x}y = 0 \qquad y(0)=0 \quad y'(1)=0$

$Ly = y'' \quad (Ly = (p(x)y')' - q(x)y \quad p(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=e^{2x}$

$x\in[0,1]$

$$G(x,s) = \begin{cases} s(x-1) & x\in[0,s) \\ x(s+1) & x\in(s,1] \end{cases}$$

$$\underline{y(x) = -\lambda\int_0^1 G(x,s)e^{2s}y(s)ds}$$