

10 Лекция №10 "Дифракция Френеля на прямолинейном крае"

Зоны Шустера и спираль Корню. Дифракция на прямолинейном крае. Условие наблюдения дифракции Френеля.

Цель лекции — рассмотреть дифракцию Френеля от прямолинейного края экрана или узкой длинной щели. Эти задачи представляют физический интерес в связи вопросом о поведении световой волны вблизи края геометрической тени.

10.1 Зоны Шустера и спираль Корню

Для решения дифракции на прямоугольной щели или на прямолинейном крае экрана удобно разбивать волновой фронт не на *кольцеобразные зоны*, или *зоны Френеля*, а на *полосатые зоны*, или *зоны Шустера*.

Рассмотрим на процесс распространения плоской волны с точки зрения принципа Гюйгенса–Френеля. Пусть плоская волна, волновой фронт AB перпендикулярен плоскости рис. 30, распространяется вдоль оси X . Разобьем фронт плоской волны AB на полосатые зоны. Для этого постро-

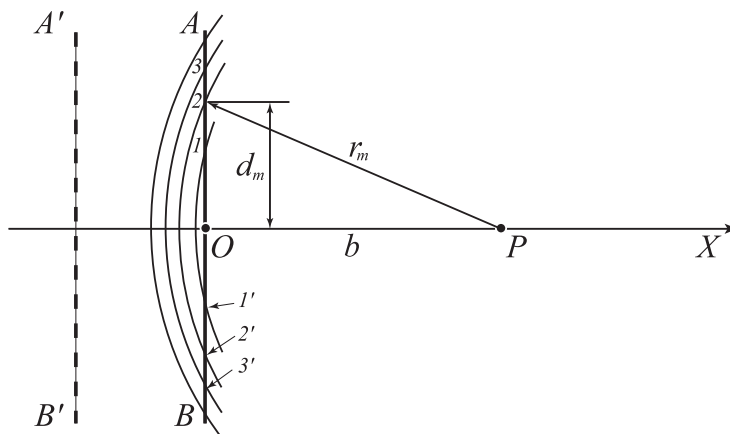


Рис. 30: Зоны Шустера.

им цилиндрические коаксиальные поверхности, радиусы которых равны

$$(225) \quad r_m = b + m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Ось цилиндров проходит через точку наблюдения P перпендикулярно плоскости рис. 30. В результате такого разбиения волновой фронт разобьется на прямоугольные полосы, называемые **зонами Шустера**. Ось, проходящая через точку O , делит центральную зону на две части. Зоны, находящиеся выше точки O имеют номера 1, 2, 3 и т. д., а зоны, находящиеся ниже — номера 1', 2', 3' и т. д. Ясно, что так как ширина (и площадь) зон с номером

m и m' одинаковая, поэтому световые колебания, которые они создают в точке P имеют одинаковую амплитуду и фазу.

Докажем, что ширина полосатых зон монотонно убывает и в пределе $r \rightarrow \infty$ стремится к $\frac{\lambda}{2}$. Заметим, что поскольку $\lambda \ll b$, то квадрат расстояния от точки P до дальней границы зоны Шустера с номером m равен

$$(226) \quad d_m^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2 = bm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4} \simeq bm\lambda.$$

Суммарная ширина первых N зон равна

$$(227) \quad d_1 + d_2 + \dots + d_N = \sqrt{\left(b + N \frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2} \approx \sqrt{bN\lambda} = \sqrt{N}d_1.$$

Отсюда найдем, что ширины последовательных зон Шустера равны

$$(228) \quad h_1 = \sqrt{b\lambda}, \quad h_2 = (\sqrt{2} - 1)h_1, \quad h_3 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})h_1, \quad \dots$$

Ясно, что ширина (и площадь) зон Шустера при удалении от центра фронта плоской волны сперва значительно убывает, а затем — монотонно

$$(229) \quad \begin{aligned} \frac{h_1}{h_2} &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 2.41, & \frac{h_2}{h_3} &= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = 1.3, \\ \frac{h_3}{h_4} &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{4} - \sqrt{3}} = 1.19, & \frac{h_4}{h_5} &= \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{4}} = 1.135, \quad \dots \end{aligned}$$

или

$$(230) \quad h_1 : h_2 : h_3 : h_4 : \dots = 1 : 0.41 : 0.32 : 0.27 : 0.24 \dots$$

Из формулы (187) Лекции №7 следует, что амплитуда вторичной световой

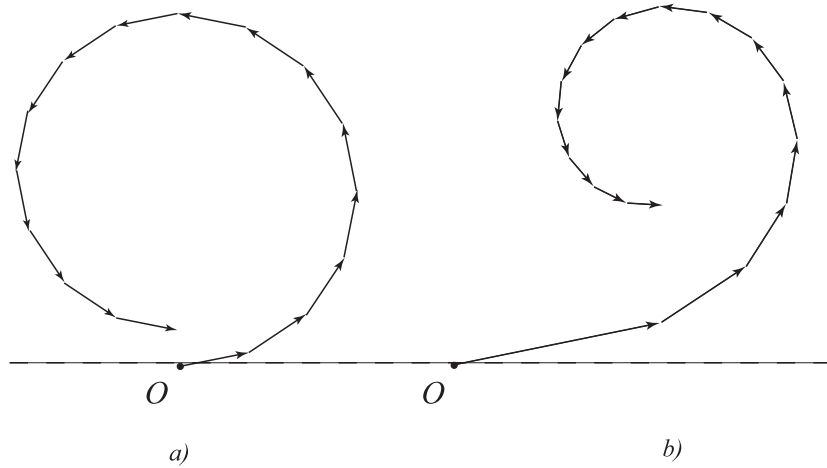


Рис. 31: Векторные диаграммы для а) зон Френеля и б) зон Шустера.

волны в точке P , излучаемой зонами Шустера, сперва (для первых) убывает очень быстро, а затем достаточно медленно. Таким образом, вклад в

результующую напряженность $E(P)$ определяется действием несколькими первыми десятками зон.

Для определения амплитуды результирующего колебания применим графический метод, см. рис. 31, *a* и *b*. Каждую зону Шустера разобьем на узкие полоски (подзоны). Колебание, создаваемое каждой подзоной в точке P , будем изображать на векторной диаграмме вектором. На рис. 31, *a* изображена векторная диаграмма для кольцевых зон, а на рис. 31, *b* — для полосатых зон, лежащий выше точки O . Отставание по фазе каждого следующего колебания в обоих случаях одинаково и равно $\alpha = \frac{\pi}{n}$, где n — количество подзон (рис. 31 выполнен для $n = 8$). Различие между этими векторными диаграммами состоит в следующем. Разбивая кольцевую зону на подзоны, см. предыдущую Лекцию №9, мы получили, что амплитуды вторичных световых волн, испускаемых подзонами (в пределах одной зоны), равны. Поэтому вклад в результирующее колебание, вносимое отдельной зоной Френеля, изображается ломанной кривой, вокруг которой можно описать полуокружность. Радиус полуокружности при переходе к зоне Френеля с большим номером уменьшается, так как пропорционально уменьшается ее вклад в результирующее колебание.

Для зон Шустера ситуация другая. Разность фаз колебаний α от соседних подзон по-прежнему постоянна, однако по формулам (229) величина амплитуды вторичных световых колебаний, испускаемых подзонами, убывает в соответствии с пропорцией (230). Поэтому ломанная линия, которая получается при графическом сложении векторов, получается именно такой, как это изображено на рис. 31, *b*.

На векторной диаграмме зоны с номерами m и m' будут располагаться симметрично относительно точки O . Устремляя ширину подзон к нулю, мы получим непрерывную кривую, называемую **спиралью Корню**. Кривая изображена на рис. 32. Она состоит из двух симметричных ветвей, которые

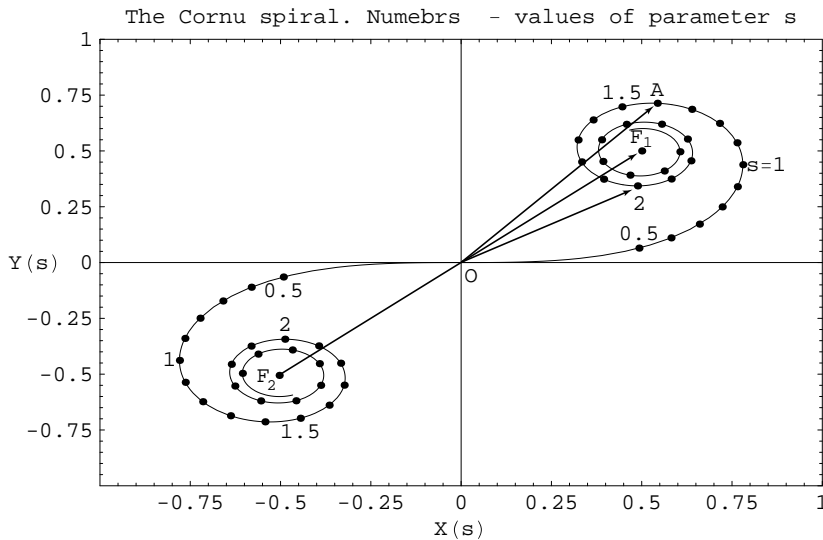


Рис. 32: Спираль Корню. Числа на спирали показывают значения параметра s .

обвиваются вокруг двух фокусов F_1 и F_2 . Верхняя ветвь спирали (участок OF_1) представляет действие верхней половины волнового фронта AB на рис. 30, а нижняя ветвь (участок F_2O) — нижней. Колебание возбуждаемое всем волновым фронтом соответствует вектору F_2F_1 . Колебание, возбуждаемое в точке P верхней частью первой зоны Шустера, соответствует вектору OA , первой и второй — вектору $O2$.

Уравнение спирали Корню может быть получено теоретически. Если координатные оси выбраны так, как показано на рис. 32, то в прямоугольных координатах уравнение спирали имеет вид

$$(231) \quad X(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi s^2}{2}\right) ds, \quad Y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi s^2}{2}\right) ds.$$

Эти интегралы называются **интегралами Френеля**. Их значение находится численными методами. Заметим, что

$$(232) \quad X(s) = -X(-s), \quad Y(s) = -Y(-s), \quad X(\infty) = Y(\infty) = 0.5.$$

Числа, отмеченные на спирали Корню, соответствуют значениям параметра s . Его величина определяет длину вектора

$$(233) \quad A = \sqrt{X(s)^2 + Y(s)^2},$$

проведенного из точки O в данную точку спирали с параметром s .

10.2 Дифракция на прямолинейном крае

С помощью спирали Корню можно решить задачу о дифракции Френеля на прямолинейном крае экрана. Рассмотрим плоскую волну, падающую на непрозрачную полуплоскость с прямолинейным краем, см. рис. 33. С по-

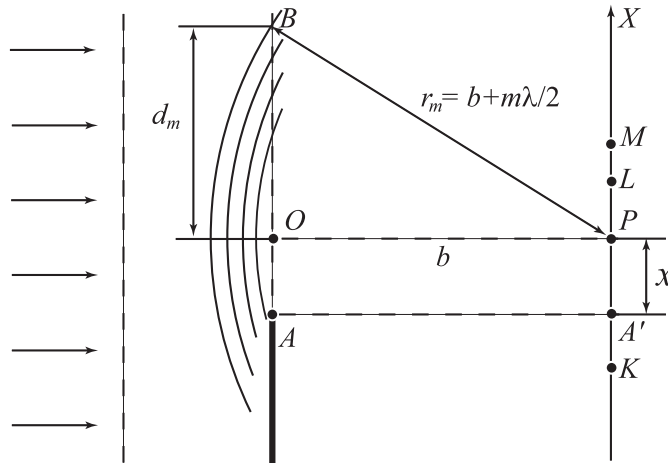


Рис. 33: Расчет зон Шустера при дифракции на прямолинейном крае полубесконечного непрозрачного экрана.

мощью спирали Корню найдем амплитуду светового колебания для точки P , находящейся на расстоянии x от края геометрической тени AA' экрана. Расчет амплитуды производится, считая, что точка O спирали соответствует рассматриваемой точке P . Искомые амплитуды изображены на рис. 34, $a-e$ для различных положений точки P на оси X . Для точки P , лежащей на границе геометрической тени (точка A') амплитуда светового колебания пропорциональна длине вектора OF_1 , рис. 34, a , так как все "штрихованные" зоны будут закрыты. При смещении точки P за границу геометрической тени (точка L) дополнительно к "штрихованным" зонам будут закрываться часть "нештрихованных" зон. Поэтому амплитуда колебания будет монотонно убывать, стремясь к нулю, рис. 34, b . Если точка P смещается вверх по оси X от геометрической тени, то дополнительно к "нештрихованным" зонам будут открываться "штрихованные" зоны. Поэтому необходимо учитывать левую часть спирали Корню.

Амплитуда возрастает, достигая первого максимума в точке L , рис. 34, c , и первого минимума в точке M , рис. 34, d . При дальнейшем движении к фокусу спирали F_2 амплитуда колебаний будет проходить максимумы и минимумы. При удалении от края геометрической тени на достаточно большое расстояние волновая поверхность будет полностью открытой. Соответствующая амплитуда пропорциональна длине вектора F_2F_1 , точно в два раза превышая амплитуду на границе геометрической тени, так как $|OF_1| = \frac{1}{2}|F_2F_1|$.

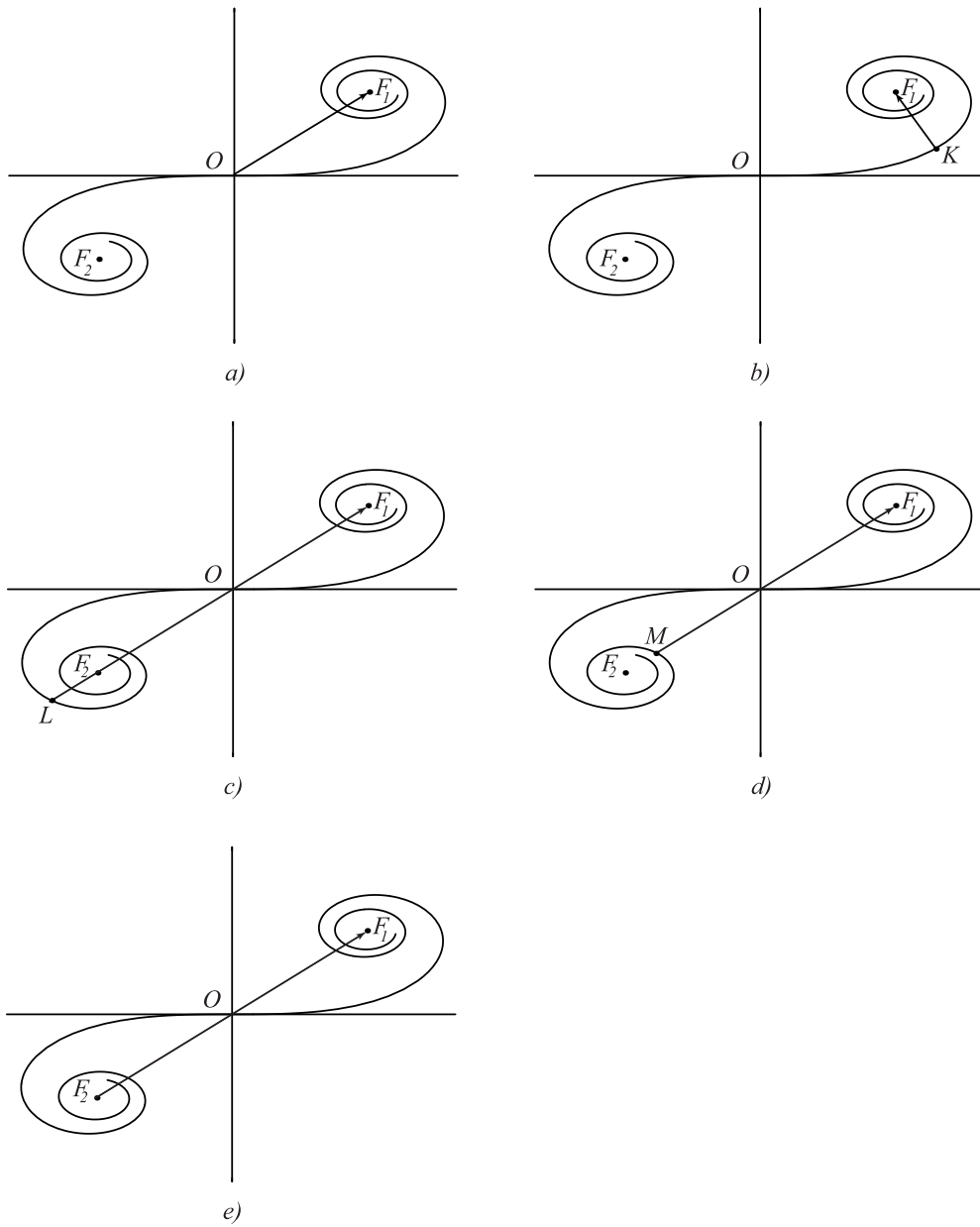


Рис. 34: К расчету амплитуды световых колебаний за полубесконечным непроницаемым экраном.

Распределение интенсивности дифракционной картины от прямолинейного края (для случая $\lambda = 600$ нм и $b = 1$ м), полученное с помощью спирали Корню¹³, показано на рис. 35. На этом рисунке видно, что нет резкой границы между светом и тенью в области геометрической тени. Обозначим

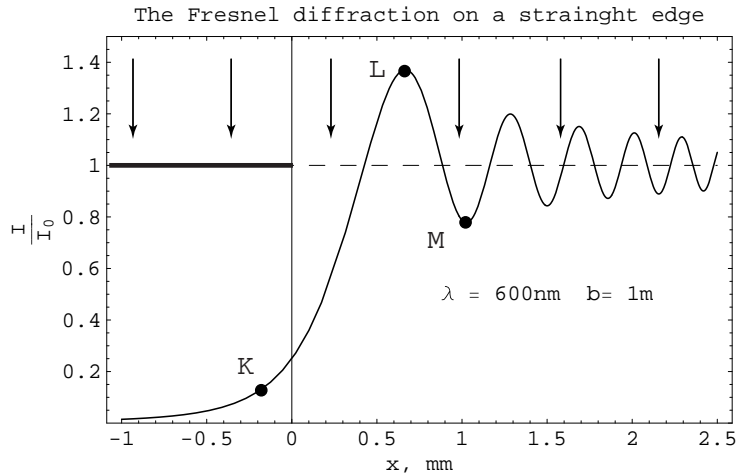


Рис. 35: Распределение интенсивности при дифракции Френеля на прямолинейном крае экрана.

через $E_0 = |F_2 F_1|$ и $I_0 = E_0^2$ амплитуду и интенсивность плоской волны. Если точка P находится на краю геометрической тени, то амплитуда и интенсивность будут соответственно равны $\frac{1}{2}E_0$ и $\frac{1}{4}I_0$. С помощью спирали Корню можно определить интенсивности света в максимумах и минимумах. Например, в первом максимуме (точка L) и минимуме (точка M) соответственно равны $I = 1.37I_0$ и $I = 0.79I_0$.

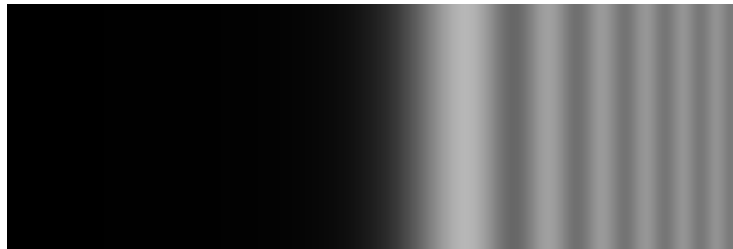


Рис. 36: Фотография дифракционной картины при дифракции Френеля на прямолинейном крае экрана.

10.3 Условие наблюдения дифракции

¹³Для плоской волны параметр $s = x\sqrt{\frac{2}{\lambda b}}$, где x и b — расстояния, определяющие положение элемента волновой поверхности относительно точки наблюдения P .

Понимание сути дифракции позволило разработать приближенные методы расчета оптических приборов, поскольку края линз в оправе представляют собой препятствия на пути распространения света. При этом выделяют два важных частных случая. Один из них – такое расположение препятствия относительно точки наблюдения, при котором волны от вторичных источников приходят в нее под разными углами и преодолевают пути, различающиеся на несколько длин волн. Это так называемая **дифракция Френеля**, или **дифракция в ближней зоне**, когда точка наблюдения близка к препятствию.

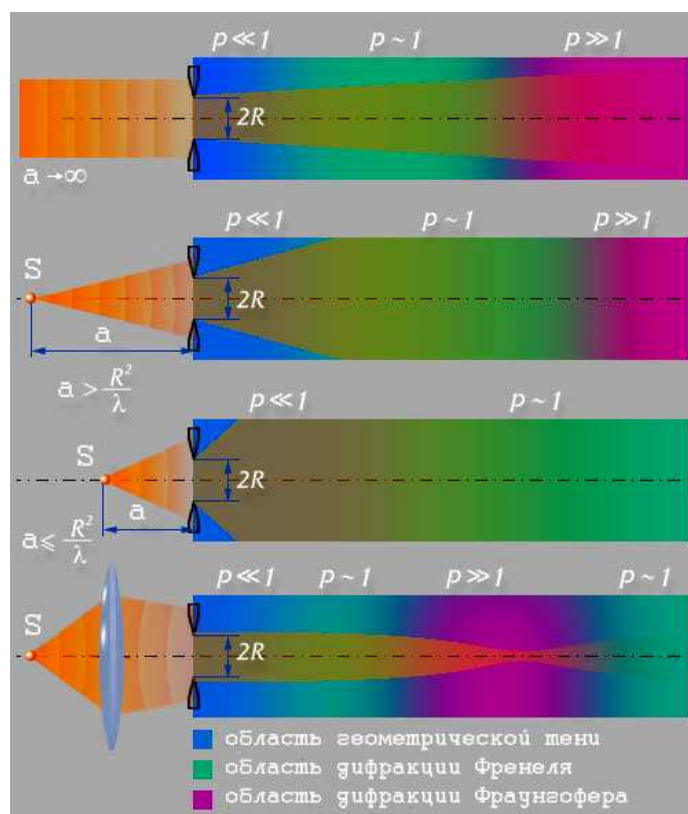


Рис. 37: Рисунок показывает три различных области наблюдения, при которых препятствие освещается плоской, сферической расходящейся и сходящейся волнами. По мере приближения точечного источника света к препятствию, граница различных областей становится отдаленной. При небольших расстояниях a от источника до препятствия можно наблюдать только две области: области геометрической тени и дифракции Френеля. Когда на препятствие падает сходящаяся сферическая волна, все три области будут находиться в пределах задней фокальной плоскости линзы.

Количественный критерий того, что дифракция вблизи оси отверстия заметно выражена состоит в следующем: радиус ρ_F центральной зоны Френеля должен превышать размеры препятствия R (в случае, когда препятствие имеет форму узкой щели или квадрата, R будет равно половине длине

щели или половине длине стороны квадрата)

$$(234) \quad \sqrt{\frac{ab}{a+b}} \lambda \geq R.$$

Отношение радиуса центральной зоны Френеля к линейному размеру препятствия называют **волновым параметром**

$$(235) \quad p = \frac{\sqrt{\frac{ab}{a+b}} \lambda}{R}.$$

Дифракция Френеля выражена отчетливо, если $p \gtrsim 1$, и дифракция практически отсутствует, если $p \ll 1$ (область геометрической тени). В случае $p \gg 1$ мы будем наблюдать **дифракцию Фраунгофера**, или дифракцию в параллельных лучах). Различные версии дифракции различаются числом открытых зон Френеля. Между ними нет четкой границы, есть плавный переход. Если препятствие освещается плоской волной ($a \rightarrow \infty$), то ради-

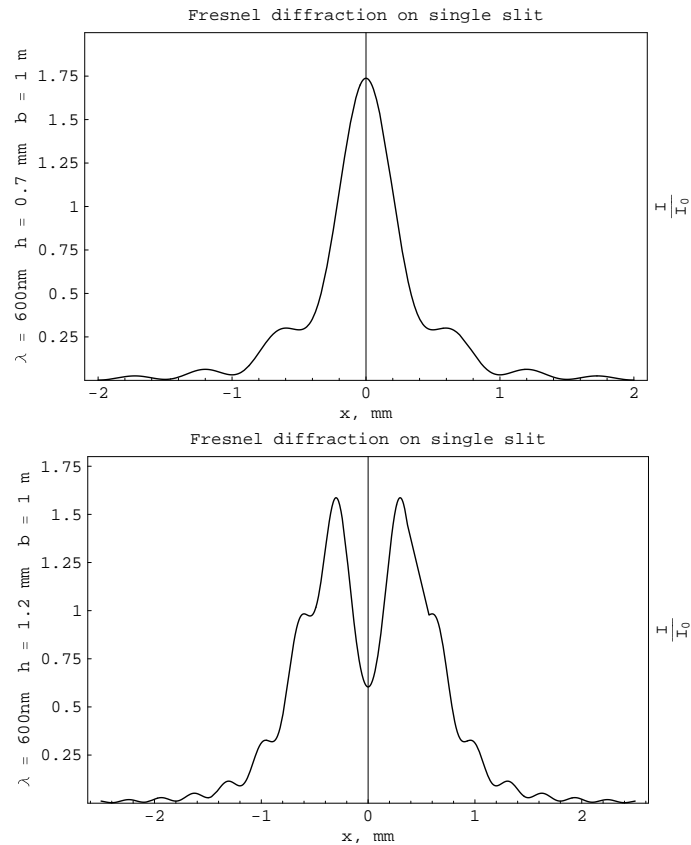


Рис. 38: Распределение интенсивности при дифракции Френеля на узкой длинной щели. Обозначения: h — ширина щели, b — расстояние от щели до экрана, λ — длина волны света, освещающего щель.

ус первой зоны Френеля $\rho_F = \sqrt{\lambda b}$, а волновой параметр $p = \frac{\sqrt{\lambda b}}{R}$. Тогда нетрудно получить условие для величины расстояния b :

- область геометрической тени, если $b \ll \frac{R^2}{\lambda}$,
- дифракция Френеля имеет место, если $b \simeq \frac{R^2}{\lambda}$,
- граница области дифракции Фраунгофера, $b \gg \frac{R^2}{\lambda}$.

10.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. С помощью спирали Корню проанализируйте дифракцию на узкой бесконечно длинной щели. Докажите, что дифракционная картина представляет собой либо светлую, либо относительно темную центральную полосу, по обе стороны которой симметрично располагаются чередующиеся светлые и темные полосы, см. рис. 36.
2. Плоская монохроматическая волна падает нормально на длинную прямоугольную щель, за которой на расстоянии $b = 60$ см находится проекционный экран. Сначала ширину щели установили такой, что в середине дифракционной картины на экране наблюдался наиболее глубокий минимум. Раздвинув после этого щель на $\Delta h = 0.70$ мм, получили в центре картины следующий минимум. Найдите длину волны света.
3. Плоская световая волна длины $\lambda = 600$ нм падает нормально на непрозрачную длинную полосу ширины $h = 0.70$ мм. За ней на расстоянии $b = 1$ м находится проекционный экран. Найдите с помощью рис. 32 отношение интенсивностей света в середине дифракционной картины и на краях геометрической тени.
4. Можно ли в принципе наблюдать дифракцию на препятствиях порядка метра. Какие условия необходимо создать, чтобы поставить такой опыт? Опишите схему такого мысленного опыта.