1. Необх. и достаточные условия аналитичности функции $f(z)=U(x,y)+i\vartheta(x,y)$ в G явл-ся непрерывность первых частных производных $U_x, U_y, \vartheta_x, \vartheta_y$ и связь их условиями Коши-Римана:

$U_x=\vartheta_y$; $U_y=-\vartheta_x$;

<u>Необходимость</u> $f(z)$ аналит. по def, если она диф-ма в G, и ее производная $f'(z)$ непрерывна в G;

$\exists f(x)=U+i\vartheta$ диф-ма в $z_0(x_0,y_0)$, тогда она имеет в т. z_0 частные произв. 1 порядка.

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$ Так как если предел $\exists$ то он не зависит от способа стремления.

Положим $\Delta X=\Delta z$ (стремление по действ. оси)

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta X\to 0}\frac{U(x_0+\Delta X,y_0)-U(x_0)}{\Delta X}+i\lim_{\Delta X\to 0}\frac{\vartheta(x_0+\Delta X,y_0)-\vartheta(x_0)}{\Delta X}$$
$$=U_x(x,y)+i\vartheta_x(x,y)$$

Положим $\Delta z=i\Delta y$, аналогично $f'(z_0)=\vartheta_y-iU_y$

$\Rightarrow U_x=\vartheta_y$ и $U_y=-\vartheta_x$ – условие К-Р.

<u>Достаточность</u>. $\exists f(z)=U+i\vartheta$ диф-ма в (x_0,y_0) и ее частные производные связывает усл. К-Р. тогда разность $U(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-U(x_0,y_0)=U_x\Delta X+U_y\Delta y+\mathcal{E}(\Delta X,\Delta y)$, $\mathcal{E}\to 0$ при $\Delta X\to 0,\Delta y\to 0$. Аналогично с ϑ

$\Delta\vartheta=\vartheta_x\Delta X+\vartheta_y\Delta y+\mathcal{E}$; $\Delta U=U_x\Delta X+U_y\Delta y+\mathcal{E}$

$\exists$ выполнено усл. К-Р.

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{U_x\Delta X+U_y\Delta y+i\vartheta_x\Delta X+i\vartheta_y\Delta y}{\Delta X+i\Delta y}+\frac{\mathcal{E}+\mathcal{E}}{\Delta X+\Delta y}=$$
$$=[\text{К.Р.}]=\frac{U_x(\Delta X+i\Delta y)}{\Delta X+i\Delta y}+i\vartheta_x\frac{\Delta X+i\Delta y}{\Delta X+i\Delta y}+\frac{2\mathcal{E}}{\Delta X+i\Delta y}\to U_x+i\vartheta_x$$

при $\Delta z=\Delta X+i\Delta y\to 0$.

След-но, $f(z)$ диф-ма в $z_0=x_0+iy_0$.

P.S.: Дополн. требование непрерывности производной в G математ. содержание понятия аналит. ф-ции не меняет. Можно показать, что при дополнительном требовании непрерывности $f(z)$ в G выполнение усл. К-Р. всюду в G явл-ся необх. и дост. для аналитичности $f(z)$ и непрерывности всех ее производных в G.

2. Теорема Коши для односвязной области.

] в односвязной области G задана однозначная аналит-я ф-я $f(z)$. Тогда интеграл от этой ф-ии по $\forall$ замкн. контуру $\Gamma \in G$ равен нулю.

— $\int\limits_\Gamma f(t)dt = \int\limits_\Gamma udx - vdy + i\int\limits_\Gamma vdx + udy$. т.к. $f(t)$ аналитична внутри Γ, то $\exists$ непрерывные част. произв-е. Применим ф-лу Грина:

$$\int\limits_C Pdx + Qdy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy;$$ имеем, с учетом усл. Коши-Римана

$$\int\limits_\Gamma udx - vdy = \iint\limits_G \left\{-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right\} dxdy = 0 \text{ и}$$

$$\int\limits_\Gamma vdx + udy = \iint\limits_G \left\{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right\} dxdy = 0.$$

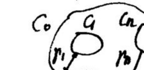
3. Теорема Коши для интеграла по границе односв. обл-ти от аналит. ф-ии: Если $f(z)$ аналитична в односвязной обл. G, ограниченной кусочно-гладким контуром C, и непрерывна в $\overline{G}$ (замкн. обл-ти) то интеграл по границе C обл. G

$\int\limits_C f(t)dt = 0.$ аналогично (более того, дословно) т.2.

4. Теорема Коши для многосвязной области.

] $f(z)$ аналит. в многосвязной области G, ограниченной извне контуром C_0 а изнутри контурами $C_1, \dots, C_n$.] $f(z)$ непрерывна в $\overline{G}$. Тогда $\int\limits_C f(t)dt = 0$. C — полная граница $C = \bigcup\limits_{i=0} C_i$; причем обход

— границы C происходит в положительном направлении. Проведем гладкие кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, соединяющие контур C_0 с контурами $C_1, \dots, C_n$. Тогда



область, ограниченная $C_0, C_1, \dots, C_n$ и $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ проходимыми дважды в противоположных направлениях, оказывается односвязной, причем $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ всегда можно выбрать так, чтобы они не пересекались. В силу т.3 интеграл по границе этой области равен нулю. Но интегралы по вспомогат. кривым $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ проходятся дважды в противоп. направлениях и при суммировании интегралов выпадают. Поэтому

$$\int\limits_{C_0^+} f(t)dt + \int\limits_{C_1^-} f(t)dt + \dots + \int\limits_{C_n^-} f(t)dt = 0.$$

5.] $f(z)$ аналитична в односвязной D, ограниченной контуром C и непрерывна в $\bar{D}$. Тогда $\forall z \in D$:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(t)}{t-z_0}\,dt \;; \quad] \; \varphi(z)=\frac{f(z)}{z-z_0};$$

Возьмем $\forall$ внутр. точку z_0 и построим замкн. контур Γ, $\Gamma \in D$, $z_0 \in \Gamma$. Рассмотрим вспомогат. ф-ю $\varphi(z)$. Возьмем замкн. контур γ лежащий в Γ, $z_0 \in \gamma$. Тогда $\varphi(z)$ аналит-на в двусвязной области, заключенной между Γ и γ. По т. Коши интеграл от $\varphi(z)$ по кривой $\Gamma+\gamma$ равен нулю:

$$\int_{\Gamma^+}\frac{f(t)}{t-z_0}\,dt+\int_{\gamma^-}\frac{f(t)}{t-z_0}\,dt=0 \Leftrightarrow$$ [Изменим во II инт. направление инт-я]

$$(*) \quad \int_{\Gamma^+}\frac{f(t)}{t-z_0}\,dt=\int_{\gamma^+}\frac{f(t)}{t-z_0}\,dt$$

Т.к. интеграл, стоящий слева, не зависит от выбора γ, то этим св-м обладает и интеграл, стоящий справа. Возьмем в качестве γ окружность γ_ρ с центром в т. z_0. Положим $t=z_0+\rho e^{i\varphi}$

$$\int_{\Gamma^+}\frac{f(t)}{t-z_0}\,dt=i\int_0^{2\pi}f(t)\,d\varphi=i\int_0^{2\pi}[f(t)-f(z_0)]\,d\varphi+i\int_0^{2\pi}f(z_0)\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}[f(t)-f(z_0)]\,d\varphi+2\pi f(z_0)i;$$

Устремим $\rho \to 0$. Т.к. $f(z)$ аналитична, след-но, непрерывна, т.е. $\forall \varepsilon>0 \; \exists \rho$ что $|f(t)-f(z_0)|<\varepsilon$ для $|t-z_0|<\rho$, т.е. при $\rho \to 0$ $\exists$ предел:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_0^{2\pi}[f(t)-f(z_0)]\,d\varphi=0, \text{ а значит } \int_0^{2\pi}f(t)\,d\varphi=2\pi f(z_0), \Rightarrow$$

$$\int_{\gamma^+}\frac{f(t)}{t-z_0}\,dt=2\pi i f(z_0), \text{ учитывая } (*): \; f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z_0}\,dt;$$

6. Теорема Морера. Пусть $f(z)$ непрерывна в односвязной области G и интеграл от $f(z)$ по $\forall$ замкн. контуру из G равен нулю. Тогда $f(z)$ аналитична в G.

При условиях теоремы функция

$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt \quad \forall z_0, z \in G$, а интеграл берется по любому пути, соединяющему эти точки в G, является аналитической в этой области ф-ей, причем $F'(z) = f(z)$. Но производная аналитич. ф-ии также является аналитической ф-ей, т.е. $\exists$ непрерывная производная ф-ии $F'(z)$, а именно

$F''(z) = f'(z)$, что и доказывает теорему.

7. т. Лиувилля. Пусть на всей компл. пл-ти $f(z)$ аналитична, а ее модуль равномерно ограничен. Тогда $f(z) \equiv const$.

Запишем значение производной $f'(z)$ в $\forall z$:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt$$ причем интегрирование будем вести по окружности некоторого радиуса R с центром в т. z, т.е. $|t-z| = R$. По усл. $\exists M : |f(t)| \le M$ независимо от R. Поэтому:

$$|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int \frac{|f(t)|}{R^2} dS \le \frac{M}{R}$$

Т.к. R можно выбрать сколь угодно большим, а $f'(z)$ не зависит от R, то $|f'(z)| = 0$. В силу произвольности выбора т. z следует $|f'(z)| \equiv 0$ на всей к. пл.
$\Rightarrow f(z) \equiv const$.

8. II т. Вейерштрасса для рядов аналит. ф-й.

$\exists$ ф-ии $U_n(z)$ аналитичны в G, непрерывны в $\overline{G}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ сх-ся равномерно на границе Γ этой области. Тогда этот ряд сх-ся равномерно и в $\overline{G}$

Разность частичных сумм данного ряда, ф-я $S_{n+p}(z)-S_n(z)$ как конечная сумма аналит. ф-й, является аналитической в G и непрерывной в $\overline{G}$. Из равном. сх-ти на Γ следует:

$|S_{n+p}(t)-S_n(t)| = |U_{n+p}(t)+\ldots+U_{n+1}(t)| < \varepsilon$ при $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ $\forall t \in \Gamma$ одновременно. Следовательно, по т. о максимуме модуля аналит. ф-ии $|S_{n+p}(z)-S_n(z)| < \varepsilon$ при $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ и для всех $z \in \overline{G}$. Тем самым для данного ряда выполнен критерий Коши.

9. Т. Абеля для степенного ряда. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ сх-ся в нек. точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится и в $\forall z: |z-z_0| < |z_1-z_0|$; причем в круге $|z_1-z_0| \leq \rho$ радиуса ρ, меньшего $|z_1-z_0|$, ряд сх-ся равномерно.

$\exists$ z такова, что $|z-z_0| < |z_1-z_0|$, рассм. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$. Обозначим $|z-z_0| = q|z_1-z_0|$, $q<1$. В силу необх. условия сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z_1-z_0)^n$ его члены стремятся к нулю при $n\to\infty$. $\Rightarrow \exists M = const: |C_n||z_1-z_0|^n \leq M$; оценка:

$|C_n| \leq \frac{M}{|z_1-z_0|^n}$; тогда: $\left|\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|\cdot|z-z_0|^n \leq M\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n}_{q<1}$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится как геом. прогрессия. Из сравнения следует сходимость рассматриваемого ряда.

Чтобы д-ть равном. сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ в круге $|z-z_0| \leq \rho < |z_1-z_0|$, достаточно в силу признака Вейерштрасса построить сходящийся числовой ряд, мажорирующий данный функциональный ряд в рассматр. области, котор. является ряд $M\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n/|z_1-z_0|^n$, также представл-й сумму беск. геом. прогрессии со знаменателем, меньшим 1.

10. Теорема о единственности определенной ф-ии.
$\exists\ f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитичны в G. Если в G $\exists$ сходящаяся к некоторой точке $a \in G$ послед-ть $\{z_n\}$ различных точек, в которых значения $f(z)$ и $g(z)$ совпадают, то $f(z) \equiv g(z)$ в G

Введем ф-ю $\psi(z) = f(z) - \varphi(z) \equiv 0$ в G в силу того, что $\psi(z)$ обращается в нуль в разл. точках z_n, посл-ть к-х сходится к $a \in G$, след-но, по теореме единственности $\psi(z) \equiv 0\ \forall z \in G \Rightarrow f(z) \equiv g(z)$ в G;

11. Если т. z_0 явл-ся устранимой особой особой точкой аналит. ф-ии $f(z)$, то $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$, причем $|c_0| < \infty$

Заметим, что в окр. устранимой особой точки $f(z)$ ограничена и может быть представлена в виде:

$$f(z) = (z-z_0)^m \varphi(z),$$

где $m \geq 0$ — целое число, а $\varphi(z_0) \neq 0$. При этом, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0$, то число m определяет порядок нуля функции $f(z)$ в т. z_0. Разложение в ряд Лорана в окр. т. z_0: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$
$\Rightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z_0) = C_0$.

12. Теорема о полюсе. Если т. z_0 — полюс аналит. ф-ии $f(z)$, то при $z \to z_0$ модуль ф-ии $f(z)$ неограниченно возрастает независимо от способа стремления точки z к z_0.

Представим $f(z)$ в окрестности т. z_0 в виде

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^{-m} \cdot \{C_{-m} +$$

$$+ C_{-m+1}(z-z_0) + \ldots + C_{-1}(z-z_0)^{m-1}\} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n =$$

$$= (z-z_0)^{-m} \varphi(z) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n,$$

причем $\varphi(z)$ в окр. z_0 ограничена и аналитична. Из такого представления следует, что при $z \to z_0$ $|f(z)|$ неограниченно возрастает независимо от способа стремления точки z к z_0.

Заметим, что если доопределить ф-ю $\varphi(z)$ в т. z_0, положив $\varphi(z_0) = C_{-m} \neq 0$, то $f(z) = \psi(z) / (z-z_0)^m$ где $\psi(z)$ — аналитична и $\psi(z_0) \neq 0$; m — порядок полюса.

13. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса. Каково бы ни было $\varepsilon>0$, в $\forall$ окрестности существенно особой точки z_0 функции $f(z)$ найдется хотя бы одна точка z_1 в которой значение ф-ии $f(z)$ отличается от произвольно заданного компл. числа B меньше, чем на ε.
Положим, что при заданном B и $\varepsilon>0$ $\exists\, \eta_0>0$, что во всех точках z из η_0-окр-ти т. z_0 значение $f(z)$ отличается от B больше чем на ε:
$|f(z)-B|>\varepsilon$, $|z-z_0|<\eta_0$. Рассм. вспомогат. ф-ю:
$\psi(z)=\dfrac{1}{f(z)-B}$. Она определена и ограничена в η_0 окр. т. z_0. След-но, z_0 — устранимая особая точка $\psi(z)$ [если $\psi(z)$ аналитична в круговом кольце $0<|z-z_0|<R_1$, ограничена: $|\psi(z)|<M$ при $0<|z-z_0|<R_1$, то т. z_0 — устранимая особая точка $\psi(z)$] Это означает, что разложение $\psi(z)$ в окр. т. z_0 имеет вид:
$\psi(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z_0)\neq 0$. Тогда, в силу определения $\psi(z)$ в данной окр. т. z_0 $f(z)$ раскладывается как $f(z)=(z-z_0)^{-m}\varphi(z)+B$, где аналит. ф-я $\varphi(z)=\dfrac{1}{g(z)}$ ограничена в η_0-окрестности т. z_0. Но последнее разложение значает что z_0 — или полюс порядка m, или при $m=0$ — прав. точка $f(z)$, и разложение в ряд Лорана $f(z)$ должно содержать лишь конечное число членов, что противоречит условию теоремы.
14. Осн. теорема теории вычетов: Пусть $f(z)$ аналитична в $\bar{G}$ за искл. конечного числа изолир. особых точек z_k, $k=\overline{1,N}\in G$. Тогда $\int_{\Gamma^+} f(t)dt=2\pi i\sum_{k=1}^{N} Res[f(z),z_k]$, Γ^+-полная граница.
Выделим каждую из особых точек z_k замкн. контуром γ_k, не сод-м др. особых точек, кроме z_k. По II т. Коши: $\int_{\Gamma^+} f(t)dt+\sum_{k=1}^{N}\int_{\gamma_k^-} f(t)dt=0$. Перенося второе слагаемое в право, учитывая: $Res[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(t)dt=c_{-1}$, получим:
$$\int_{\Gamma^+} f(t)dt=2\pi i\sum_{k=1}^{N} Res[f(z),z_k];$$

(15) Основн. теорема высшей алгебры: полином n-й степени имеет на компл. плоскости ровно n нулей (с учетом их кратности).

Представим полином $F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ в виде $F(z) = f(z) + \varphi(z)$, положив $f(z) = a_0 z^n$, $\varphi(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$; Составим отношение:

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \frac{a_1}{a_0}\frac{1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{a_0}\frac{1}{z^n}.$$

Легко видеть, что при $\forall$ заданных $a_0, a_1, \ldots, a_n$ всегда найдется R_0, что для всех значений $|z| = R > R_0$ имеет место неравенство:

$$0 < \left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right|_{|z|=R} < 1.$$

Из т. Руше следует, что полное число нулей $F(z)$ в круге $|z| = R$ равно числу нулей в этом круге функции $f(z) = a_0 z^n$. Но $f(z) = a_0 z^n$ на всей к. пл. имеет единственный n-кратный нуль: $z = 0$. Отсюда в силу произвольности $R \geq R_0$ и следует утвержд. теор.

Диф-е интеграла Коши под знаком интеграла:

(16) Функция $\varphi(z,t)$ $\forall t \in C$ — аналитическая ф-я z в G; $\varphi(z,t)$ и $\partial\varphi/\partial z$ — непрерывные ф-ии по совокупности перем-х z, t при произвольном изменении z в G и t на кривой C.

Т.е. $\varphi(z,t)$: $z = x + iy$; $t = \varepsilon + i\eta$, $t \in C$ (кусоч. глад. крив.) $z \in G$; тогда существует интеграл от $\varphi(z,t)$ по кривой C:

$F(z) = \int \varphi(z,t)dt = \mathbf{U}(x,y) + i\mathbf{V}(x,y)$. $F(z)$ — аналитична в G и ее производную можно вычислять под знаком интегр-ла дифф-н. Расм. криволин. интеграл: $\mathbf{U}(x,y) = \int_C U(x,y,\varepsilon,\eta)d\varepsilon - V(x,y,\varepsilon,\eta)d\eta$; т.к. U и V обладают непрерыв. по совокупности частными производными (по x и y), то: $\mathbf{U}_x(x,y) = \int_C U_x d\varepsilon - V_x d\eta$; $\mathbf{U}_y(x,y) = \int_C U_y d\varepsilon - V_y d\eta$. Сами U_x и U_y являются непрер-ми ф-ми x и y в G. На основании аналогичных св-в $V(x,y)$ и усл. Коши-Римана для $\varphi(z,t)$, получим:

$$\mathbf{V}_y(x,y) = \int_C V_y d\varepsilon + U_y d\eta = \int_C U_x d\varepsilon - V_x d\eta = \mathbf{U}_x$$

$$\mathbf{V}_x(x,y) = \int_C V_x d\varepsilon + U_x d\eta = -\int_C U_y d\varepsilon - V_y d\eta = -\mathbf{U}_y$$

Т.о. для $F(z)$ выполнено усл. К-Р, что говорит о $f(z)$ — аналит. в G

Заметим, что:

$$F'(z) = \mathbf{U}_x(x,y) + i\mathbf{V}_x(x,y) = \int_C U_x d\varepsilon - V_x d\eta + i\int_C V_x d\varepsilon + U_x d\eta = \int_C \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,t)dt;$$

17. Производные высших порядков.

$\exists$ $f(z)$ аналитична в G и непрерывна в $\bar{G}$. Тогда во внутренних точках области G $\exists$ производная $\forall$ порядка.

С помощью интеграла Коши: $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z}\,dt$.

— Рассмотрим в G подобласть (замкнутую) $\bar{G}'$ расстояние всех точек которой от границы Γ обл. $G > d > 0$, т.е. $|z-t| \geq d$; ф-я $\varphi(z,t) = \frac{f(t)}{t-z}$ аналитична в G', и $\partial\varphi/\partial z = \frac{f(t)}{(t-z)^2}$ в этой области явл-ся непрерывной ф-ей своих аргументов. Во внутр. точках G' производная $f'(z)$ может быть представлена в виде:

— $f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^2}\,dt$ — аналит. ф-я, и ее произв.

— $f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^3}\,dt$. Далее, по индукции: $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt$,

т.к. $\forall$ внутр. т. z области G может быть построена соотв. подобласть $\bar{G}'$, то эти **ф-лы справедливы** $\forall z \in G$

18. Формула Коши-Адамара. Радиус сходимости R степ. ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ определяется $R = 1/l$, где $l = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ — верхний предел посл-ти $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$. Положим $l > 0$. Покажем, что в $\forall z_1 : |z_1 - z_0| < 1/l$ ряд сх-ся, а в $\forall z_2 : |z_2 - z_0| > 1/l$ — расходится. Т.к. l - верхний предел, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geq N\ \sqrt[n]{|c_n|} < l + \varepsilon$. С другой стороны, для того же ε найдется беск. много членов посл-ти, больших $l - \varepsilon$; $\forall z_1 : l|z_1 - z_0| < 1$ $\exists$ $\varepsilon = \frac{1 - l|z_1 - z_0|}{2|z_1 - z_0|} > 0$. Тогда:

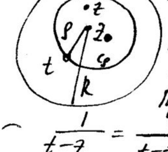
— $\sqrt[n]{|c_n|}\,|z_1 - z_0| < (l+\varepsilon)|z_1 - z_0| = \frac{1 + l|z_1 - z_0|}{2} = q < 1$

— Отсюда следует, что $\sum\limits^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n$ мажорируется геом. прогрессией $\sum\limits_{n=0} q^n$ со знаменателем, меньшим 1, что и доказывает его сходимость. Возьмем $\forall z_2 : l|z_2 - z_0| > 1$ и выберем в качестве $\varepsilon = \frac{l|z_2 - z_0| - 1}{|z_2 - z_0|} > 0$, получим:

$\sqrt[n]{|c_n|}\,|z_2 - z_0| > (l - \varepsilon)|z_2 - z_0| = 1$ для бесконечного множества значений n. Отсюда $|c_n (z - z_0)^n| > 1$, что на основании необходимого признака сходимости свидетельствует о расходимости ряда $\sum\limits_{n=0} c_n (z_2 - z_0)^n$;

19. Теорема Тейлора. Функция $f(z)$, аналитичная внутри круга $|z-z_0|<R$, может быть представлена в этом круге сходящимся однозначно определенным рядом $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$

Выберем $\forall z$ внутри $|z-z_0|<R$ и построим окружность C_ρ с центром в т. z_0 радиуса $\rho<R$, содержащую т. z. Такое построение возможно $\forall$ т z данной области; т.к. z - внутр. точка области $|z-z_0|<\rho$, в которой $f(z)$ аналитична, и по ф-ле Коши: (1) $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(t)}{t-z}dt$; Преобразуем:



$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}}=\frac{1}{t-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^n}\ (2)$$

[т.к.: $\frac{z-z_0}{t-z_0}<1$ и суммой геом. прогр. с $|q|<1$] При $t\in C_\rho$ ряд (2) (получен-ный) сх-ся равномерно по t, т.к. он мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z-z_0|^n}{\rho^{n+1}}$ $(|z-z_0|<\rho)$. (2) → (1) интегрируем почленно:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n.$$ Введем обозначение:

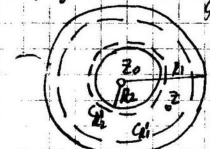
$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt;$$ тогда:

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$; окружность C_ρ можно заменить, в силу теоремы Коши, любым замкнутым контуром C, лежащим в обл. $|z-z_0|<R$ и содержащим т. z_0 внутри. Т.к. z - $\forall$ точка данной обл., то ряд сход-ся к $f(z)$ всюду внутри $|z-z_0|<R$, причем в $|z-z_0|\le\rho<R$ равномерно. Коэф-ты разложения на основании формулы для производных аналит. ф-ии:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!};$$ ∃ есть др. разложение: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n'(z-z_0)^n$ (3)

где хотя бы один коэф-т $C_n'\neq C_n$. Степенной ряд (3) сход-ся в круге $|z-z_0|<R$, поэтому $C_n'=f^{(n)}(z_0)/n!$, что совпадает с выр-м для C_n.

20. $f(z)$, аналитическая в кольце $R_2 < |z-z_0| < R_1$ однозначно представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана.



Фиксируем $\forall$ т. z внутри кольца $R_2<|z-z_0|<R_1$ и построим окружности $C_{R_1'}$ и $C_{R_2'}$. По ф-ле Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1'}}\frac{f(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-_{R_2'}}\frac{f(t)}{t-z}\,dt$$

$R_2<R_2'<R_1'<R_1$

$R_2'<|z-z_0|<R_1'$

На $C_{R_1'}$ выполняется нер-во: $\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right|\le q<1$; поэтому представим

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{(t-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{t-z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}}=$$

$$=\frac{1}{t-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n$$ и почленно интегрируем в силу равномерной сходимости:

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1'}}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$ где $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1'}}\frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{n+1}}$ (1) $n>0$.

Аналогично, т.к. на $C_{R_2'}$: $\left|\frac{t-z_0}{z-z_0}\right|<1$, то:

$$\frac{1}{t-z}=-\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n,$$ почленно интегрируем:

$$f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-_{R_2'}}\frac{f(t)\,dt}{t-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$ где $c_{-n}=-\frac{1}{2\pi i}\cdot$

$\cdot\int_{C^-_{R_2'}}f(t)(t-z_0)^{n-1}dt$, либо $c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_2'}}\frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{-n+1}}\,dt$ (2) $n>0$

В (1) и (2) подынтегр. ф-ии аналитичны в круговом кольце $R_2<|z-z_0|<R_1$. Поэтому в силу теор. Коши значение соотв.-х интегралов не изменяется при произвольной деформации контуров интегрирования в обл. аналитичности подынт. ф-й. Это позволяет:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt,\quad n\in\mathbb{Z}$$, где C – $\forall$ замкн. контур из $R_2<|z-z_0|<R_1$ содерж. z_0

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n,$$ причем ряд сх-ся к $f(z)$ в $R_2<\overline{R_2}\le|z-z_0|\le\overline{R_1}<R_1$ равномерно

$]\ \exists\ c_n'$: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n'(z-z_0)^n$. Проверим окр-ть C_R, $R\in(R_2,R_1)$ с центром в z_0, тогда оба ряда с коэф. c_n и c_n' сх-ся равном.

Умножим их на $(z-z_0)^{-m-1}$, где $m = const$. Интегрируем полученное. Рассмотрим $\int\limits_{C_R} (z-z_0)^{n-m-1} dz$, положим $z-z_0 = Re^{i\varphi}$, получим: $\int\limits_{C_R} (z-z_0)^{n-m-1} dz = R^{n-m} i \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-m)} d\varphi = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi i, & n = m \end{cases}$ Отличными от нуля окажутся лишь по одному слагаемому из бесконечных сумм в левой и правой частях этого выр-я. $\Rightarrow$ $C_m = C'_m$, а т.к. m — $\forall$ число, $\Rightarrow$ разложение $\exists!$

21. Пусть $f(z)$ аналитична на полной компл. пл-ти, за искл. конечного числа изолир. особых точек. z_k, $k = \overline{1,N}$, включая и $z = \infty$ ($z_N = \infty$), тогда:
$\sum\limits_{k=1}^{N} Res(f(z), z_k) = 0$. Рассмотрим замкн. контур C, содержащий все $(N-1)$ особые точки z_k, располож. на конечном расстоянии от т. $z = 0$. По основной т. вычетов:
(*) $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C^+} f(t)dt = \sum\limits_{k=1}^{N-1} Res[f(z), z_k]$. Но т.к. вычет в $z = \infty$ определяется как $\frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{C^+} f(t)dt = C_{-1}$, то интеграл, стоящий ~~слева~~ в (*) равен вычету $f(z)$ в т. ∞ взятому с обр. знаком, откуда $\Rightarrow$ утв. теоремы.

22. Лемма. Пусть $f(z)$ аналитична в $Im\, z > 0$ всюду, за искл. конечного числа изолир. особых точек, и $\exists$ R_0, M и δ, все > 0, что для всех точек верхней п/пл-ти: $|z| > R_0$, имеет место оценка: $|f(z)| < M/|z|^{1+\delta}$, $|z| > R_0$; тогда $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C'_R} f(t)dt = 0$, где контур C'_R — полуокр-ть $|z| = R$, $Im\, z > 0$. Док-во: $\left|\int\limits_{C'_R} f(t)dt\right| \leq \int\limits_{C'_R} |f(t)| ds < \frac{M\pi R}{R^{1+\delta}} = \frac{\pi M}{R^\delta} \to 0$

Теорема: Пусть $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ может быть аналитически продолжена на верхнюю п/п $Im\, z \geq 0$, причем $f(z)$ удовл. лемме, и не имеет особых точек на действ. оси. Тогда $\exists \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{N} Res[f(z), z_k]$ где z_k — особые точки $f(z)$ в верхней п/пл.

27. $\exists\ f(x)$, заданная на $x \in \mathbb{R}$ может быть аналит. продолжена на верхнюю п/п-ть $\operatorname{Im} z \geq 0$, а ее аналит. продолжение $f(z)$ в верхней п/п. удовл. лемме Жордана и не имеет особых точек на действ. оси. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[e^{iax} f(z), z_k\right];$$ где z_k – особые точки $f(z)$ в верхней п/п-ти.

По усл., особые точки $f(z)$ удовл. условию: $|z_k| < R_0$. Рассм. в верх. п/п-ти з замкн. контур, состоящий из $-R \le x \le R$, $R > R_0$ и дуги C_R' полуокр-ти $|z| = R$ в верхней п/п. По осн. теореме теор. вычетов:

$$\int_{-R}^{R} e^{iax} f(x)\,dx + \int_{C_R'} e^{iat} f(t)\,dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[e^{iaz} f(z), z_k\right];$$

По лемме Жордана предел второго слагаемого в лев. части при $R \to \infty$ равен нулю. $\Rightarrow$ утв. док.

28. $\exists$ в $\mathbb{C}$ задана $f(z)$, аналитичная всюду, за исключ. конечного числа изолир. особых точек z_k, $k = \overline{1,p}$, причем все z_k – полюса. Положим, в Γ нет нулей и особ. точек и

$\exists\ \varphi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ – логарифм. производная.

$\exists\ z = \tilde{z}_k$ – нуль порядка n_k ф-ции $f(z)$. Тогда в окр-ти этой точки $f(z) = (z - \tilde{z}_k)^{n_k} f_1(z)$, $f_1(\tilde{z}_k) \neq 0$, причем $\tilde{z}_k$ – правильная точка $f_1(z)$.

$$\varphi(z) = (\ln f(z))' = n_k (\ln(z - \tilde{z}_k))' + (\ln f_1)' = \frac{n_k}{z - \tilde{z}_k} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

$\Rightarrow \tilde{z}_k$ – полюс первого порядка для $\varphi(z)$, причем res $\varphi(z)$ в этой точке равен n_k. Итак, в нуле порядка n_k ф-ции $f(z)$ ее лог. вычет: $\operatorname{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)}; \tilde{z}_k\right] = n_k$

$\exists\ z_k$ – полюс порядка p_k $f(z)$;
тогда в окрестности этой точки $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{(z - z_k)^{p_k}}$, $f_1(z_k) \neq 0$

причем z_k – правильная т. $f_1(z)$, поэтому:

$$\varphi(z) = -\frac{p_k}{z - z_k} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$ $\Rightarrow z_k$ – полюс первого порядка $\varphi(z)$ и вычет в этой точке: $-p_k$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right] = -p_k$$

Док-во. $f(z)$ по усл. в $\operatorname{Im} z>0$ имеет конечное число особ. точек z_k, причем $|z_k|<R_0$. Рассм. замкнутый контур, состоящий из отрезка действ. оси $-R\le x\le R$, $R>R_0$ и полуокружн-ти $C_R'=R$ в верх. п/пл-ти. В силу осн. теоремы вычетов:

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx+\int_{C_R'} f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k].$$

Т.к. выполнены усл. леммы, то предел второго слагаемого в лев. части при $R\to\infty$ равен нулю; правая часть при $R>R_0$ от R не зависит. $\Rightarrow$ что предел первого слагаемого $\exists$ и его значение опред-ся формулой теоремы.

23. Лемма Жордана для верхней п/п. $\exists$ $f(z)$ аналитична в $\operatorname{Im} z>0$, за исключением конечного числа изолир. особ. точек, и равномерно относительно $0\le\arg z\le\pi$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$. Тогда при $a>0$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R'} e^{iat}f(t)\,dt=0,$$

где C_R' - дуга полуокр-ти $|z|=R$ в верхней п/пл-ти z.

Док-во:

Условие равномерного стремления $f(z)$ к 0 означает, что $|f(z)|<M_R$, где $M_R\to 0$ при $R\to\infty$. С пом. этого оценим:

$\exists$ $t=Re^{i\varphi}$, т.к. $\sin\varphi\ge\frac{2\varphi}{\pi}$ при $0\le\varphi\le\pi/2$

$$\left|\int_{C_R'} e^{iat}f(t)\,dt\right|\le M_R\cdot R\int_0^{\pi}|e^{iat}|\,d\varphi=M_R\cdot R\int_0^{\pi}e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2MR\int_0^{\pi/2}e^{-aR\sin\varphi}\,d\varphi<2M_R R\int_0^{\pi/2}\exp\left(-\frac{2aR}{\pi}\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{a}M_R\left(1-e^{-aR}\right)\to 0\quad R\to\infty.$$

27. $\rceil f(x)$, заданная на $x \in \mathbb{R}$ может быть аналит. продолжена на верхнюю п/п-ть $\operatorname{Im} z \geq 0$, а ее аналит. продолжение $f(z)$ в верхней п/п. удовл. лемме Жордана и не имеет особых точек на действ. оси. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}\left[e^{iaz} f(z), z_k\right]; \text{ где}$$

z_k - особые точки $f(z)$ в верхней п/п-ти.

По усл., особые точки $f(z)$ удовл. условию: $|z_k| < R_0$. Рассм. в верх. п/п-ти 2 замкн. контур, состоящий из $-R \leq x \leq R$, $R > R_0$ и дуги C'_R полуокр-ти $|z| = R$ в верхней п/п. По осн. теореме теор. вычетов:

$$\int_{-R}^{R} e^{iax} f(x)\,dx + \int_{C'_R} e^{iat} f(t)\,dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[e^{iaz} f(z), z_k\right];$$

По лемме Жордана предел второго слагаемого в лев. части при $R \to \infty$ равен нулю. $\Rightarrow$ утв. теор.

28. $\rceil$ в $\mathbb{C}$ задана $f(z)$, аналитичная всюду, за исключ. конечного числа изолир. особых точек z_k, $k = \overline{1, p}$, причем все z_k - полюса. Положим, в Γ нет нулей и всех точек и

$$\rceil\ \varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \text{ - логарифм. производная.}$$

$\rceil\ z = \tilde{z}_k$ - нуль порядка n_k ф-ии $f(z)$. Тогда в окр-ти этой точки $f(z) = (z - \tilde{z}_k)^{n_k} f_1(z)$, $f_1(\tilde{z}_k) \neq 0$, причем $\tilde{z}_k$ - правильная точка $f_1(z)$.

$$\varphi(z) = (\ln f(z))' = n_k (\ln (z - \tilde{z}_k))' + (\ln f_1)' = \frac{n_k}{z - \tilde{z}_k} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{z}_k$ - полюс первого порядка для $\varphi(z)$, причем res $\varphi(z)$ в этой точке равен n_k. Итак, в нуле порядка n_k ф-ии $f(z)$ ее лог. вычет: $\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}; \tilde{z}_k\right] = n_k$

$\rceil$ z_k - полюс порядка p_k $f(z)$; тогда в окрестности этой точки $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{(z - z_k)^{p_k}}$, $f_1(z_k) \neq 0$

причем z_k - правильная т. $f_1(z)$, поэтому:

$$\varphi(z) = -\frac{p_k}{z - z_k} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$$ $\Rightarrow$ z_k - полюс первого порядка $\varphi(z)$ и вычет в этой точке: $-p_k$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right] = -p_k$$

29. см. 17.

30. см. 18

31.

32.] в конечной обл. G с конт. γ задана однозначная аналит. ф-я $f(z)$, непрерывная в $\bar{G}$ и осущ-ся взаимнооднозначное отображение γ на конеч. контур Γ компл. пл. ω. Тогда, если при данном отображении контуров сохраняется напр-е обхода, то $f(z)$ осущ-т конформное отображение G на внутр. обл. огран. Γ.
Покажем, что $f(z)$ устанавливает взаимнооднозн. соотв-е между G и G', ~~т.е. надо показать что $f(z)$ как~~

Расм. $\omega_1 \in G'$ и $\omega_2 \notin G'$, построим в G вспомогат. ф-ии: $F_1(z) \overset{\text{def}}{=} f(z) - \omega_1$; $F_2(z) = f(z) - \omega_2$; $\forall z \in G$. Подсчитаем число нулей в G:
Т.к. в силу условия о сохранении напр-я обхода, то:

$$N[F_1(z)] = \frac{1}{2\pi} Var[\arg(f-\omega_1)]_\gamma = 1 \quad (1)$$

$$N[F_2(z)] = \frac{1}{2\pi} Var[\arg(f-\omega_2)]_\gamma = 0 \quad (2)$$

из (2) $\to$ в силу произвольности выбора ω_2 вне G' $\Rightarrow$ что все значения ф-ии $f(z)$ при $z \in G$ принадлежат обл. G'. Из (1) $\Rightarrow$ что $\forall\ \omega_1 \in G'$ в G найдется одна и только одна z_1, для к-й $f(z_1) = \omega_1$, что и док-т взаимную однозначность данного отображения.

33. Интеграл $F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$ сходится в обл. $\operatorname{Re} p > a$, где a - показатель степени роста $f(t)$, причем $\forall x_0 > a$ интеграл при $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$ сх-ся равномерно.
$\forall\ p = x + iy$ при $x > a$ $\exists \varepsilon > 0$ что $x > a_1 = a + \varepsilon$, причем $|f(t)| < Me^{a_1 t}$. Тогда по признаку ~~сравнения~~ сходимости несобств. ин-в:

$$|F(p)| = \left|\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt\right| \leq M \int\limits_0^\infty e^{-xt} e^{a_1 t}\,dt = \frac{M}{x - a_1}, \quad x > a_1$$

что и говорит о сходимости интеграла при $x > a$.
Если $x \geq x_0 > a$, оценка:

$$|F(p)| \leq M \int\limits_0^\infty e^{-(x_0 - a_1)t}\,dt = \frac{M}{x_0 - a_1}$$ что и доказывает в силу признака В-са равном. сходимость инт. по параметру p в $\operatorname{Re} p \geq x_0 > a$.

34 Изображение Лапласа $f(t)$ - является аналитической ф-ей компл. перем. p в обл. $Re\, p > a$, где a - показатель степени роста.

В силу теоремы о сущ. изобр. интеграл в обл. $Re\, p > a$ сходится. Разобьем интервал интегрирования на отрезки $[t_i; t_{i+1}]$ произв. конечной длины причем $t_0 = 0$, $t_n \to \infty$, $n \to \infty$. Тогда $F(p)$ при $Re\, p > a$ - сумма сходящегося ряда:

$$(*)\, F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(p).$$

Поскольку n-й остаток сход. ряда равен $\int_{t_{n+1}}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$, то ряд $(*)$ сх-ся равномерно в обл. $Re\, p \geq x_0 > a$. Каждая из функций $U_n(p) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t) dt$ определена как интеграл завис. от пар-ра p, по отрезку конечной длины на компл. пл-ти t. т.е. $U_n(p)$ - целые ф-ии p. ряд $(*)$ удовл. всем условиям т. В-са, а значит $F(p)$ аналитична в обл. $Re\, p > a$, а ее производные можно ~~вычислять~~, дифф-я почлен. ф-но по p.

35. см 16

36 $z^n + 1 = 0$. ~~по т. Виета~~ $\sum_{i=1}^{n} z_i - \frac{b}{a} = 0$; ~~$z_1 \cdot z_2 \ldots z_n = (-1)^n C = (-1)^n$~~

36. $z^n + 1 = 0$; $C_n z^n + \overset{=0}{C_{n-1}} z^{n-1} + \ldots + \overset{=1}{C_0} = 0$] z_i - корень, их n штук

$\sum_{i=1}^{n} z_i = -\frac{C_{n-1}}{C_n} = 0$; $z_1 \cdot z_2 \ldots z_n = (-1)^n C_0 = (-1)^n$;

37. $z^n - 1 = 0$; $C_n z^n + \overset{=0}{C_{n-1}} z^{n-1} + \ldots + \overset{=-1}{C_0} = 0$

$\sum_{i=1}^{n} z_i = -\frac{C_{n-1}}{C_n} = 0$; $z_1 \cdot z_2 \ldots z_n = (-1)^n C_0 = (-1)^{n+1}$;

38. Вычисл. в полюсах вычетов. $\exists$ z_0 – полюс первого порядка, тогда в окр. z_0: $f(z) = C_{-1}(z-z_0)^{-1} + C_0 + C_1(z-z_0) + \ldots$

Умножив на $(z-z_0)$ и $z \to z_0$:

$$C_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z);$$ $f(z)$ в окр. z_0 может быть представлена в виде отношения двух аналит. ф-й $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$;

$\varphi(z_0) \neq 0$; а z_0 – нуль 1го порядка для $\psi(z)$, т.е.

$$\psi(z) = (z-z_0)\psi'(z_0) + \frac{\psi''(z_0)}{2}(z-z_0)^2 + \ldots + \psi'(z_0) \neq 0.$$

Из вышесказ. $\Rightarrow$

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}; \quad \left[f(z) = \varphi(z)/\psi(z)\right]$$

$\exists$ z_0 – полюс m-го порядка. Разложим в окр. z_0:

$$f(z) = C_{-m}(z-z_0)^{-m} + \ldots + C_{-1}(z-z_0)^{-1} + C_0 + C_1(z-z_0) + \ldots$$

Умножив на $(z-z_0)^m$:

$$(z-z_0)^m f(z) = C_{-m} + C_{-m+1}(z-z_0) + \ldots + C_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \ldots$$

Взяв $(m-1)$ производную от обеих частей этого р-ва и $z \to z_0$:

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

39. см. 22.

40. $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos ax\, dx$, ~~$\cos x$ 29~~

$$I = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{iax} dx,$$ далее – см п. 41.

№11. $f(x)$ – зад. на $-\infty < x < \infty$, может быть ан. продолж. на $\operatorname{Im} z \geq 0$, а её ан. прод-е в верх. полупл. удовл. усл. леммы Жордана и не им. ос. точек на действ. оси.

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \text{Выч}\left[e^{i\alpha z} f(z), z_k\right]$.

$\alpha > 0$, z_k – ос. т. $f(z)$ в верх. полупл. z.

Док-во: По усл.: $|z_k| < R_0$.

Рассм. в $\operatorname{Im} z \geq 0$ замкн. конт., сост. из отрезка действ. оси $-R \leq x \leq R$, $R > R_0$ и дуги C'_R полуокр. $|z| = R$.

По осн. теореме теор. выч.:

$$\int\limits_{-R}^{R} e^{i\alpha x} f(x) dx + \int\limits_{C'_R} e^{i\alpha \zeta} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Выч}\left[e^{i\alpha z} f(z), z_k\right].$$

По лемме Жордана

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{C'_R} e^{i\alpha \zeta} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

ч.т.д.

№42 Логарифм. пр-я: $\varphi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$

Пусть $z = \tilde{z}_k$ - нуль порядка n_k ф-ции $f(z)$. Тогда в окр. этой точки:

$$f(z) = (z - \tilde{z}_k)^{n_k} f_1(z), \quad f_1(\tilde{z}_k) \neq 0$$

причем $\tilde{z}_k$ - прав. т. $f_1(z)$. $\Rightarrow$

$$\varphi(z) = (\ln f(z))' = n_k (\ln(z - \tilde{z}_k))' + (\ln f_1)' =$$

$$= \frac{n_k}{z - \tilde{z}_k} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}. \Rightarrow \tilde{z}_k \text{ - полюс 1го пор. } \varphi(z).$$

и $\text{Выч}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)}, \tilde{z}_k\right] = n_k$.

Т.к. z_k - полюс пор. p_k $f(z)$, то:

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z - z_k)^{p_k}}, \quad f_1(z_k) \neq 0$$

прав. т-ка $f_1(z)$.

$$\Rightarrow \varphi(z) = -\frac{p_k}{z - z_k} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

$$\Rightarrow \text{Выч}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right] = -p_k.$$

№ 45 (1) опер. Лапласа при конф. отобр. сохраняется.

Пусть в ξ пл-ти x, y зад. гармонич. ф-я $u(x,y)$; т.е.

$$\underline{\Delta u} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \forall x, y \in \xi$$

с пом. невырожд. преобр. независ. пер-х:

(1) $\varepsilon = \varepsilon(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$; $\dfrac{D(\varepsilon,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$. (2)

отобразим $\xi(x,y)$ на но-в. $\xi(\varepsilon,\eta)$. Задание (1) эквив-но заданию в обл. ξ к. пл-ти z:

$$\zeta = f(z) = \varepsilon(x,y) + i\eta(x,y).$$

При этом $f(z)$ отобр. обл. $\xi(z)$ на обл. $\xi'(\zeta)$. В силу (2) ур-я (1) однозначно разрешимы отн. x, y, и тем самым в ξ' ← обл. пл-ти ε, η опред. ф-я

$$\tilde{u}(\varepsilon,\eta) = u[x(\varepsilon,\eta), y(\varepsilon,\eta)].$$

Выясним усл. <u>на</u> (1), чтобы $\tilde{u}(\varepsilon,\eta)$ была гарм.

Предполагая, что ф-и (1) дважды непрер.-но дифф-мы в ξ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon_x)^2 + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varepsilon \partial \eta}\varepsilon_x \eta_x + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2}(\eta_x)^2 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varepsilon}\varepsilon_{xx} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\eta_{xx}.$$

аналогично по y.
подст. в Δu:

№45(2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi_x^2+\xi_y^2)+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y)+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}(\eta_x^2+\eta_y^2)+\frac{\partial u}{\partial\xi}(\xi_{xx}+\xi_{yy})+\frac{\partial u}{\partial\eta}(\eta_{xx}+\eta_{yy})=0.$$

! Для того, чтобы это ур-е было ур-м Лапласа:

$$\xi_{xx}+\xi_{yy}=0,\ \eta_{xx}+\eta_{yy}=0,\ (*)$$

(3) $\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y=0$ и

(4) $\xi_x^2+\xi_y^2=\eta_x^2+\eta_y^2\neq 0.$

(*) озн-т, что $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ - гарм. в ξ!

из (3): $\dfrac{\xi_x}{\eta_y}=-\dfrac{\xi_y}{\eta_x}=\mu(x,y)$. тогда:

из (4): $\underset{\eta_y^2+\eta_x^2}{\mu^2[\eta_y^2+\eta_x^2]}\neq 0.$

$\Rightarrow \mu^2(x,y)\equiv 1.$ при $x,y\in\xi$. т.е. $\mu=\pm 1$.

$\mu=1$: $\xi_x=\eta_y$, $\xi_y=-\eta_x$ ← усл. К-Р. т.е. $f(z)$-ан.

из (2) и (4) $\Rightarrow$ отобр. ξ на ξ' взаимн. однозн, а $f'(z)\neq 0$. т.е. отобр. - конф.

При $\mu=-1$: $\overline{f}(z)$-ан., отобр - конф. Пр.

№46. Если $f^{(n)}(t)$ удовл. усл. ∃я изобр-я при $\operatorname{Re} p > a$ и $f(t) \doteqdot F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$, то

Для $n = 1$:

$$f'(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = pF(p) - f(0).$$

Для n: $$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n \left\{ F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right\}, \operatorname{Re} p > a.$$

№47. Пусть $F(p) \doteqdot f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$.

$$F'(p) = -\int_0^\infty e^{-pt}\, t f(t)\,dt \doteqdot -t f(t).$$

и $$F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n \cdot t^n f(t), \operatorname{Re} p > a.$$

№418. Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$.

$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ – удовл. всем усл. $\exists$-я изобр., имеет тот же показ. степ. роста, что и $f(t)$.

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}\,dt \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

$$\varphi(t) \doteqdot \int_0^\infty f(\tau)\,d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \underline{\frac{1}{p} \cdot F(p)}.$$