№49. $f(t) = t^{\nu}$, $\nu > 1$.

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\nu} dt, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (1)$$

$t = 0$ – т. разрыва 2го рода. При $\nu < 0$ – ф-я не удовл. усл.
∃ преобр. и => $\notin$ основному рассматр. классу ф-и действ. пер-й, для кот. ∃ изобр. Лапласа.
Но интеграл сх-ся при $\operatorname{Re} p > 0$, $\nu > -1$.
т.е. изобр. Лапласа ∃ и опр. ф-й (1).

Рассм. $p = x > 0$ (действ. зн.) $xt = s$.

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{\nu} dt = \frac{1}{x^{\nu+1}} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\nu} ds = \frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}}.$$

$\Gamma(\nu+1)$ – гамма-ф. Эйлера. т.к. $F(p)$ – ан. в обл. $\operatorname{Re} p > 0$, то в силу единственности ан. прод-я для $F(p)$:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\nu} dt = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \quad \nu > -1, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Для целых $\nu = n$: $t^n \doteqdot \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}$, $\operatorname{Re} p > 0$.

№50. Свертка: $\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau$.

Пусть $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > a_1$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > a_2$

$$\int_0^\infty e^{-pt}dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau =$$
$$= \int_0^\infty f_1(\tau)\,d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)\,dt$$

Сделав замену $t-\tau = t'$:

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \doteqdot \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau)\,d\tau \int_0^\infty e^{-pt'} f_2(t') \cdot$$
$$\cdot\, dt' = F_1(p)\, F_2(p).$$

№51. Ф-ла среднего знач.:

$f(z)$ - ан. в односв. ξ и z_0 - вн. т-ка ξ.
Опишем из z_0 окр. с R_0 целиком лежащую в ξ. Тогда по ф. Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta.$$ Но на C_{R_0}: $\zeta = z_0 + R_0 e^{i\varphi}$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi})\,d\varphi$$

или $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R_0} \int_{C_{R_0}} f(\zeta)\,dS.$$

№52. Кругл. св-во: Дробно-лин. ф-я переводит окружности на пл-ти z в окр-ти на пл-ти ω. При этом вкл. прямые в семейство окр-й, как с $R=\infty$.

Док-во: Достаточно доказать, что преобразование инверсии: $\omega = \frac{1}{z}$, облад. кругл-м св-м.
(т.к. линейное отображ. отображает окр. на окр.)

Рассм. произв. окр-ть, кот. на пл-ти z:

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0.$$

A, B, C, D – действ. числа; $A \geq 0$, $B^2+C^2 > 4AD$.

При $A=0$ – прямая; $D=0$ – окр. проходит через $z=0$.

При преобразовании, осущ-м ф-й $\omega = u+iv = \frac{1}{z}$, коорд. x, y:

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}; \quad y = -\frac{v}{u^2+v^2}$$ т.е. окр. в нов. коорд.:

$$D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A=0.$$

ч.т.д.

Заметим, что при $D=0$ прямая.

т.е. окр., проход. через $z=0$, ф-й $\omega=\frac{1}{z}$ отображ. в прямую.

№53. Теор. запаздывания.

$F(p) \doteqdot f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$ и

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau,\ \tau > 0 \\ f(t-\tau), & t \geq \tau \end{cases}.$$

$$F_\tau(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f_\tau(t)\,dt = \int_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau)\cdot dt.$$

В посл. $\int$: $t - \tau = t'$:

$$F_\tau(p) = \int_0^\infty e^{-p(t'+\tau)} f(t')\,dt' = e^{-p\tau} F(p)$$

ч.т.д.

√ 55. Принцип максимума.

$f(z)$ - ан. в ξ и непрер. в $\overline{\xi}$. Тогда или $|f(z)| \equiv const$, или $\max$ знач. модуля достигаются только на границе обл.

по усл. $|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$ - непрер. в замкн. обл. Поэтому она достиг. $\max$ знач. M в какой-либо т-ке (x_0, y_0) дан. обл-ти. т.е.

$$M = |f(z_0)| \geq |f(z)|,$$

П/ z_0 - вн. т. ξ. $z_0 = x_0 + iy_0$, $z \in \overline{\xi}$.

построим в ξ круг K_0 с рад. R и центром в z_0. Ф-ла ср. зн.:

$$2\pi M = \left| \int_0^{2\pi} f(\zeta) d\varphi \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(\zeta)| d\varphi \leq 2\pi M.$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} |f(\zeta)| d\varphi = 2\pi M. \quad (1)$$

$\Rightarrow$ в силу непрер. $f(\zeta)$ на контуре интегр-я $\Rightarrow$ $|f(\zeta)| = M$ при $\zeta = z_0 + Re^{i\varphi}$.

П/ в ζ_0 контура $\int$-я $|f(\zeta_0)| < M$, то из непрер-ти $f(\zeta) \Rightarrow |f(\zeta)| < M$ в некот. окр. т. ζ_0.

т.е. $\exists\ [\varphi_1, \varphi_2] : |f(\zeta)| \leq M - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда:

$$\int_0^{2\pi} |f(\zeta)| d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |f(\zeta)| d\varphi + \int_0^{\varphi_1} (-{}''-) + \int_{\varphi_2}^{2\pi} (-{}''-) \leq$$

$$\leq (M-\varepsilon)(\varphi_2 - \varphi_1) + M[2\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] < 2\pi M.$$

что противор. (1). ч.т.д.*

№ 56. принцип min: if ан. ф. в обл. ξ $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \xi$ и непрер. в $\overline{\xi}$.
(то имеет место принцип min.)
см. № 55, рассм. $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$.

№ 57(1) I теор. Вейерштрасса: пусть ф-и $u_n(z)$ - ан. в ξ, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сх. равномерно в ∀ замкн. $\overline{\xi'}$ ← подобл. ξ. к $f(z)$.

1) $f(z)$ - ан. в ξ

2) $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$

3) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$ сх. равном. в ∀ $\overline{\xi'}$.

<u>Док-во</u>: №1) Рассм. произв. вн. т. $z_0 \in \xi$ и построим односв. обл. ← подобл. ξ ξ', содерж. z_0 внутри.

В силу усл. - $f(z)$ непрер. в ξ. В силу ан-ти $u_n(z)$, $\int f(z)$ по замкн. C в ξ':

$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

т.е. вып. все усл. теор. Морера. ⇒ $f(z)$ - ан. в окр. ξ' т-ки z_0. В силу произвольности т. z_0 ⇒ ан-ть $f(z)$ в обл. ξ.

Заметим: ∀ n (натур): $r_n = \sum\limits_{j=n+1}^{\infty} u_j(z) = f(z) - \sum\limits_{j=1}^{n} u_j(z)$; аналитич. в ξ.

№57.(2)

№2. Фиксир. произв. $z_0 \in \xi$ и выб. произв. замкн. конт. C, целиком $\in$ построеной выше подобл. ξ' и содерж. z_0 внутри.

min расст. от z_0 до конт. $C = d$. Рассм.:

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}};$$ т.к.

$\min\limits_{z\in C} |z-z_0| = d > 0$, в силу усл. теор. сх. равномерно на C.

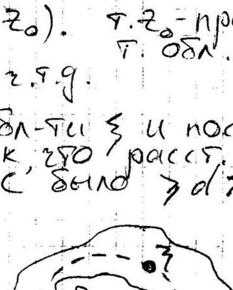
Поэт. проинт-в почленно по C и восп. произв. ан. ф-и через $\int$ Коши:

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z_0).$$ т. z_0 - произв. т. обл.

ч.т.д.

№3. Рассм. подобл. $\overline{\xi'}$ обл-ти ξ и постр. конт. C, сод. так, что расст. от $\forall z \in \overline{\xi'}$ до $\forall$ т. $\zeta \in C$ было $\geq d > 0$:

$|z-\zeta| \geq d > 0$.



т.к. $u_n(z)$ - ан. в ξ, то

$\forall z \in \overline{\xi'}$: $\displaystyle\frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{u_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta =$

$= u_n^{(k)}(z)$. В силу равн. сх. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$:

№57. (3) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$: что на конт. C при $n \geqslant N$: имеет место равномерная оценка $|r_n(\zeta)| < \varepsilon \cdot \frac{2\pi d^{k+1}}{k!\, L}$, где L - длина конт. C.

Тогда: $$|r_n^{(k)}(z)| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \int\limits_C \frac{|r_n(\zeta)|}{|\zeta - z|^{k+1}}\, ds < \varepsilon$$

Для $\forall z \in \overline{\xi'}$ одновременно. $\Rightarrow$ ч.т.д.

№ 58 (1) см. № 10.

№ 59. На границе круга сх. степ. ряда лежит хотя бы одна особ. т. ан-ой ф-ии $F(z)$, к кот. сх. данный ряд.

<u>Док-во</u>: предпол., что все т. окр-ти C_0 круга K_0 сх-ти ряда $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ явл. прав., т.е. $\forall \hat{z} \in C_0$

$\exists\ \rho(\hat{z}) > 0$: что в общей части K_0 и своего круга сх-ти $|z-\hat{z}|<\rho(\hat{z})$ соотв-ий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\hat{z})(z-\hat{z})^n$ сх-ся к $f(z)$. Рад. $K_0 = R_0$.

Рассм. $\rho(\hat{z})$, опред. на C_0. Покажем, что $\forall\ \hat{z}_1$ и $\hat{z}_2$ на C_0: $|\rho(\hat{z}_1)-\rho(\hat{z}_2)| \le |\hat{z}_1-\hat{z}_2|$.

предполож., что усл. не вып-но. #

$\rho(\hat{z}_2)-\rho(\hat{z}_1) = |\hat{z}_1-\hat{z}_2| + \delta$; $\delta > 0$. Тогда $|z-\hat{z}_1|<\rho(\hat{z}_1)$ ← круг сх. ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\hat{z}_1)\cdot (z-\hat{z}_1)^n = f_1(z)$ лежит внутри кр. сх. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\hat{z}_2)(z-\hat{z}_2)^n = f_2(z)$. В общ. части этих кругов и круга K_0 <u>оба</u> ряда сх. к $f(z)$.

$\Rightarrow f_2(z)$ явл. ан. прод. $f_1(z)$. Это означает, что в $|z-\hat{z}_1|<\rho(z_1)+\delta$ опред. $f_2(z)$, совпад. с $f_1(z)$ в $|z-\hat{z}_1|<\rho(\hat{z}_1)$.

№59 (2). В силу т. Тейлора $\Rightarrow$ что рад. сх-ти $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\hat{z}_1)(z-\hat{z}_1)^n$ не меньше чем

$\rho(\hat{z}_1)+\delta$, что противореч. исх-м данным.

Из этого усл. $\Rightarrow$ равн. непрер. $\rho(\hat{z})$ на C_0.

$\left[\ |\rho(\hat{z}_1)-\rho(\hat{z}_2)|<\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0 \text{ при } |\hat{z}_1-\hat{z}_2|<\varepsilon\ \right]$

т.к. $\rho(\hat{z})>0$ - она огр. снизу и в силу непрер-ти достиг. на C_0 точн. ниж. грани:

$\rho(\hat{z}) \geq \rho(\hat{z}_0)=\rho_0>0$. (т.к. $\forall\hat{z}\in C_0: \rho(\hat{z})>0$)

В силу ед-ти ан-го продолж.: в круге $|z-z_0|<R_0+\rho_0$ определена однозн. ан. $F(z)$, совп. с $f(z)$ в $|z-z_0|<R_0$ $\Rightarrow$ рад. сх-ти исх. степ. ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ должен быть $R_0+\rho_0$, а не R_0. - противоречит усл. теор. ч.т.д.

№60. Теор. Руше: $f(z)$ и $\varphi(z)$ - ан. в замкн. $\overline{\xi}$, причем на границе Γ обл-ти ξ:

$$|f(z)|_\Gamma > |\varphi(z)|_\Gamma$$

тогда полн. число нулей в ξ ф-и $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ = полн. числу нулей ф-и $f(z)$.

<u>Док-во</u>: $f(z)$ не им. ос. т. на Γ (она ан. в $\overline{\xi}$ и не обращ. в нуль на Γ) ← эти усл. так же вып. для $F(z)$: т.к. $|F(z)|_\Gamma = |f(z)+\varphi(z)| \geq |f(z)|_\Gamma - |\varphi(z)|_\Gamma > 0$. Поэтому:

$$N[f(z)+\varphi(z)] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}[\arg(f+\varphi)]_\Gamma$$

$$N[f(z)] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}[\arg(f(z))]_\Gamma .$$

Рассм.: $N[f(z)+\varphi(z)] - N[f] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}[\arg(f+\varphi) - \arg(f)]_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}[\arg(1+\varphi/f)]_\Gamma$ *

Введем $\omega = 1 + \varphi(z)/f(z)$. При обх. т-й z конт. Γ, соотв. ей т. ω опишет замкн. крив. C, кот. в силу усл. теор. будет целиком $\in$ некот. $|\omega - 1| \leq \rho_0 < 1$. Тем самым т. $\omega = 0$ - вне C крив.

$\Rightarrow \operatorname{Var}[\arg \omega]_\Gamma = 0$. ч.т.д.

№61. Ан. продолж. через границу: обл. ξ_1 и ξ_2 им. в качестве общ. уч-ка границы крив. Γ_{12}, и в них зад. ан. ф-и f_1 и $f_2(z)$, непрер. соотв. в

$$\xi_1 + \Gamma_{12} \text{ и } \xi_2 + \Gamma_{12} \text{ и совп-е на } \Gamma_{12}.$$

Т.к. т. $z \in \Gamma_{12}$ – внутр. т. этого мн-ва, $\leftarrow \xi = \xi_1 + \xi_2 + \Gamma_{12}$, то мн-во ξ – обл.

Покажем, что $F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in \xi_1 + \Gamma_{12} \\ f_2(z), & z \in \xi_2 + \Gamma_{12} \end{cases}$ ан. в ξ.

т.е. дост. док-ть, что для $\forall z_0 \in \xi$, леж. на Γ_{12} можно указать такую окр., в кот. $F(z)$ – ан.

Возьм. произв. $z_0 \in \Gamma_{12}$ и постр. окр. C_0 с центр. в z_0, целиком $\in \xi$. Рассм. инт-л типа Коши:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$ В силу св-в $\int$, зав-х от параметра,

$\Phi(z)$ – ан. при $\forall z$ не лежащей на C_0.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 + \gamma_{12}} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{12} + C_2} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

C_1 и C_2 – части C_0 в ξ_1 и ξ_2. γ_{12} – часть Γ_{12}, попавш. внутрь окр. C_0.

Т.к. т. $z \in \xi_1$, то в силу т. Коши $\int\limits_{C_1+\gamma_{12}} = f_1(z)$, а $\int\limits_{\gamma_{12}+C_2} = 0. \Rightarrow \Phi(z) = f_1(z) = F(z)$ при $z \in \xi_1$, аналог. с ξ_2. В т. $z_0 \in \gamma_{12}$: в силу непрер. Φ, f_1 и f_2 в C_0 $\longrightarrow \Phi = f_1 = f_2 = F$

№62. (1) Теор. о ан. продолж. с вещ. оси.;

№1) Т.к. $f_i(z)$ – ан. в ξ, содержащей $[a, b]$ действ. оси X, то из соотн. $F(f_1(x), ..., f_n(x)) = 0$ при $a \le x \le b \Rightarrow F(f_1(z), ..) = 0$ при $z \in \xi$

<u>Док-во</u>: дост. док., что при сформулир-х усл.

$$\Phi(z) = F[f_1(z), ..., f_n(z)] \text{ – ан. в } \xi.$$

Докажем для случ. 2х пер-х ω_i, т.е. $\Phi(z) = F[f_1(z), f_2(z)]$. Фиксир. в ξ $\forall z_0$ и пусть $f_1(z_0) = \omega_1^0$ и $f_2(z_0) = \omega_2^0$. Составим выр:

(1) $$\Phi(z_0 + \Delta z) - \Phi(z_0) = F(\omega_1^0 + \Delta\omega_1^0, \omega_2^0 + \Delta\omega_2^0) - F(\omega_1^0, \omega_2^0)$$

т.к. по предположению $\exists$ частн. пр-е ф-и F, непрер-е по совокупн. пер-х, то (1):

$$\Phi(z_0 + \Delta z) - \Phi(z_0) = \frac{\partial F}{\partial \omega_1}(\omega_1^0, \omega_2^0 + \Delta\omega_2)\Delta\omega_1 + \eta_1\Delta\omega_1 + \frac{\partial F}{\partial \omega_2}(\omega_1^0, \omega_2^0)\Delta\omega_2 + \eta_2\Delta\omega_2,$$ где

η_1, η_2 – ∞ малы при $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2 \to 0$, т.е. при $\Delta z \to 0$

сост. $\frac{\Delta\Phi}{\Delta z}$ и перейдем к $\lim$ при $\Delta z \to 0$.

В силу непрер. частн. пр-х F:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Phi(z_0 + \Delta z)}{\Delta z} = \frac{\partial F}{\partial \omega_1}(\omega_1^0, \omega_2^0) f_1'(z_0) + \frac{\partial F}{\partial \omega_2}(\omega_1^0, \omega_2^0) f_2'(z_0),$$ что док-т $\exists$-е

$\Phi'(z) \Rightarrow \Phi(z)$ – аналитична.

№62 (2) №2) пусть $\omega_1 = f_1(z_1), \dots, \omega_n = f_n(z_n)$ - явл. ан. в $\xi_1, \dots, \xi_n$ ← обл. содерж-е отрезки $[a_i, b_i]$ $(i = 1, \dots, n)$ действ. оси x.

Пусть $F(\omega_1, \dots, \omega_n)$ - ан. по каждой из пер-х $\omega_1, \dots, \omega_n$ в области их изменения. Тогда:

$$F(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) = 0$$

при $a_i \leq x \leq b_i$ $\Rightarrow$ $F(f_1(z_1), \dots) = 0$ при $z_i \in \xi_i$.

<u>Док-во</u>: фиксир. $x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$ и рассм.

$$\Phi_1(z_1) = F[f_1(z_1), f_2(x_2^0), \dots, f_n(x_n^0)]$$

сложн. ф. к. пер-й $z_1 \in \xi_1$. Поэтому по теор. о ед-ти определения ан. ф. из $F[f_1(x_1), f_2(x_2^0), \dots, f_n(x_n^0)] = 0$ при $a_1 \leq x \leq b_1 \Rightarrow F[f_1(z_1), f_2(x_2^0), \dots] = 0$

$\Rightarrow$ в силу произв-ти $x_2^0, \dots \Rightarrow$ при $z_1 \in \xi_1$

$F[f_1(z_1), f_2(x_2), \dots] = 0$. Теперь фикс-м произв. $z_1^0 \in \xi_1$:

$$\Phi_2(z_2) = F[f_1(z_1^0), f_2(z_2), \dots, f_n(x_n^0)].$$

Так же как $\Phi_1(z_1)$, $\Phi_2(z_2)$ - ан. по z_2 в ξ_2

$$\Rightarrow F[f_1(z_1^0), f_2(z_2), f_3(x_3^0), \dots] = 0$$

при $z_2 \in \xi_2$. Далее аналогично со всеми f_n доказ-м теорему.

63.(1) Дифф-е криволин. $\int$, зав. от параметра.

Пусть зад. $\varphi(z, \zeta)$ - однозн. для $z = x+iy \in \xi$ и $\zeta = \varepsilon + i\eta \in C$, где C - некот. кус-гл. крив.

Взаимн. расп. ξ и C - произв. Пусть $\varphi(z,\zeta)$:

а) $\forall \zeta \in C$ - $\varphi(z,\zeta)$ - ан. ф-я z в ξ.

б) $\varphi(z,\zeta)$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\zeta)$ - непрер. ф-и по совокупности z, ζ при произв. изменении z в ξ и ζ на C.

Усл. б) означ., что Re и Im ф-и $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\zeta)$ непрер. по совокупн. пер-х x, y, ε, η.

Тогда $\forall z \in \xi$ $\exists$:

$$F(z) = \int_C \varphi(z,\zeta)\,d\zeta = \mathcal{U}(x,y) + i\mathcal{V}(x,y).$$

$F(z)$ - ан. ф-я к.пер-й z в обл. ξ, причем $F'(z)$ можно выч. при помощи дифф-я под знаком интеграла.

Рассм. крив. $\int$:

$$\mathcal{U}(x,y) = \int_C u(x,y,\varepsilon,\eta)\,d\varepsilon - v(x,y,\varepsilon,\eta)\,d\eta.$$

т.к. $\exists$ u_x, v_x, u_y, v_y - непрер., то $\exists$:

$$\mathcal{U}_x(x,y) = \int_C u_x\,d\varepsilon - v_x\,d\eta$$

$$\mathcal{U}_y(x,y) = \int_C u_y\,d\varepsilon - v_y\,d\eta$$

№63 (г). u_x и u_y — непрер. по x, y в ξ.
на основании аналогичн. св-в ф-и $V(x,y)$ и исп. усл. Коши-Римана для $\varphi(z,\zeta)$:

$$V_y(x,y) = \int_C v_y\,d\xi + u_y\,d\eta = \int_C u_x\,d\xi - v_x\,d\eta = U_x.$$

$$V_x(x,y) = \int_C v_x\,d\xi + u_x\,d\eta = -\int_C u_y\,d\xi - v_y\,d\eta = -U_y.$$

т.е. для $F(z)$ вып. усл. Коши-Римана =>
$F(z)$ — ан. в ξ. Причем:

$$F'(z) = U_x(x,y) + iV_x(x,y) =$$
$$= \int_C u_x\,d\xi - v_x\,d\eta + i\int_C v_x\,d\xi + u_x\,d\eta =$$
$$= \int_C \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\zeta)\,d\zeta.$$

При этом т.к. $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ удовл. усл. а) и б), что и $\varphi(z,\zeta)$, то $F'(z)$ — ан. в обл. ξ.

№64. Пусть зад. $F(p)$ в обл. $\mathrm{Re}\, p > a$ – кот. явл. изображением кус.-гл. ф-и $f(t)$, t - действ., облад. степ. роста a, тогда:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp, \quad x > a.$$

Док-во: рассм. $\varphi(t) = e^{-xt} f(t)$, $x > a$.

$\varphi(t)$ – кус-гл. на $\forall$ огранич. участке оси t, имеет конечн. число т. разрыва I рода и экспоненциально $\to 0$ при $t \to \infty$.

С пом. интеграла Фурье:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta) e^{i\xi(t-\eta)} d\eta$$

$$e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x\eta} f(\eta) e^{i\xi(t-\eta)} d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} d\xi \int\limits_{0}^{\infty} e^{(x+i\xi)\eta} f(\eta)\, d\eta, \text{ т.к.}$$

$f(\eta) \equiv 0$ при $\eta < 0$. Пусть $p = x + i\xi$.

Внутр. интеграл – это изобр. $F(p)$ искомой ф-и $f(t)$, тогда:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(x+i\xi)t} F(p)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp.$$

№65. Задача Коши:

(1) $a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = f(t)$,

(2) $y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$

$a_1, \ldots, a_n, y_0, \ldots, y_{n-1}$ – зад. const., $f(t)$ – удовл. усл. ∃ изобр.

Реш. з. Коши с нулевыми нач. усл. для неоднор. ур-я (1): $L[y(t)] = f(t)$.

В силу нач. усл., перейдя к изображениям $Y(p) \doteqdot y(t)$ и $F(p) \doteqdot f(t)$: $Y(p) P_n(p) = F(p)$

откуда $Y(p) = F(p) / P_n(p)$. Т.к. $Y(p)$ – изобр., то её оригинал можно найти с пом. ф. Меллина.

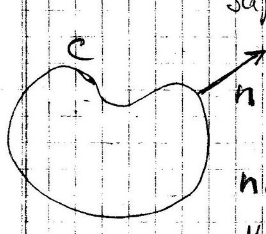
Но $\dfrac{a_0}{P_n(p)}$ ← изобр-е ф-и $\psi_{n-1}(t)$ – решения з. Коши для однородного ур-я $a_0 \psi_k^{(n)}(t) + a_1 \psi_k^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n \psi_k(t) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. с нач. усл.: $\psi_{n-1}^{(j)}(0) = \delta_{n-1, j}$, $j = 0, \ldots, n-1$.

По теор. о свертке:

$$Y(p) \doteqdot y(t) = \frac{1}{a_0} \int_0^t \psi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

$\psi_{n-1}(t)$ – ф-я ед-го точечного источника. $\psi_{n-1} \simeq g(t)$.

№66. Задача Робэна — распределение заряда на проводящей границе.



ds - дано; $\sigma(s) = \frac{1}{4\pi} E_n\big|_C = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C$; n - внеш. нормаль.

$\mathbf{n}\,dS = -4\pi q$ - дано.

найти $\sigma(s)$ - ?

Решим задачу, if C - окр. $|\zeta| = 1$. Тогда

$$\Omega(s) = \frac{q}{2\pi} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u_0}{\partial n_0} \Rightarrow \frac{\partial u_0}{\partial n_0}\Big|_{|\zeta|=1} = -2q.$$

Пусть известна $\zeta = f(z)$ - конф. отобр. C на пл-ти z на окр. $|\zeta| = 1$ на ζ.

Тогда $$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C = \frac{\partial u_0}{\partial n_0}\Big|_{|\zeta|=1}\cdot\frac{\partial n_0}{\partial n}\Big|_C + \frac{\partial u_0}{\partial \tau_0}\Big|_{|\zeta|=1}\cdot\frac{\partial \tau_0}{\partial n}\Big|_C =$$

$= \Big[$т.к. контур проводящий, то $E_\tau = \frac{\partial u_0}{\partial \tau_0} = 0\Big] = -2q\,\frac{\partial n_0}{\partial n}\Big|_C$

но при конф. отобр. n к C переходит в n_0 к $|\zeta| = 1$, меняется лишь её длина.

$$\Rightarrow \frac{\partial n_0}{\partial n}\Big|_C = |f'(z)|_C \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C = -2q|f'(z)|_C$$

$$\Rightarrow \sigma(s) = \frac{q}{2\pi}\cdot|f'(z)|_C.$$

№69. Заданием соответствия 3м разл. т-м пл-ти z трёх разл-х т-к пл. ω дробно-лин. ф-я опред. однозначно.

Док-во: должны док., что усл. $f(z_1)=\omega_1$, $f(z_2)=\omega_2$, $f(z_3)=\omega_3$, где z_{1-3} и ω_{1-3} – зад. к.т., однозн. опред. зн. пар-в λ, α, β. сост. выр:

$$\omega_1-\omega_3=\lambda\cdot\frac{(z_1-z_3)(\beta-\alpha)}{(\beta+z_1)(\beta+z_3)} \quad (1)$$

$$\omega_2-\omega_3=\lambda\cdot\frac{(z_2-z_3)(\beta-\alpha)}{(\beta+z_2)(\beta+z_3)} \quad (2)$$

Разделив (1) на (2):

$$\frac{\omega_1-\omega_3}{\omega_2-\omega_3}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\cdot\frac{\beta+z_2}{\beta+z_1} \quad (3).$$

Для произв. т. z: $\dfrac{\omega_1-\omega}{\omega_2-\omega}=\dfrac{z_1-z}{z_2-z}\cdot\dfrac{\beta+z_2}{\beta+z_1}$ (4)

Исключив из (3) и (4) пар-р β:

$$\frac{\omega_1-\omega}{\omega_2-\omega}\Big/\frac{\omega_1-\omega_3}{\omega_2-\omega_3}=\frac{z_1-z}{z_2-z}\Big/\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} \quad (5).$$

(5) – неявное выр-е искомой др-лин ф-и.

[redacted] №70. Изображ. пр-я:

$f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > a_1$ и $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > a_2$. Тогда: преобр. Лапласа

$$f(t) \risingdotseq F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f_1(t) f_2(t)\,dt.$$

Подст. в в виде инт-ла Меллина $f_1(t)$ и меняя порядок инт-я что возможно в силу равн. сх-ти данных несобств. инт-в:

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-pt} f_2(t)\,dt \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{qt} F_1(q)\,dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q)\,dq \int_0^\infty e^{-(p-q)t} f_2(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q) F_2(p-q)\,dq, \quad \operatorname{Re} q = x > a_1,$$

ф-я $F_2(p-q)$ опр. при $\operatorname{Re}(p-q) > a_2$

откуда $\operatorname{Re} p > a_1 + a_2$.

№71 (1) $f(z)$ – однозн. и однолистн. ан. ф. в ξ и $f'(z) \neq 0$, при $z \in \xi$. Тогда $f(z)$ произв. конф. отобр. обл. ξ на обл. G к. пл-ти ω: $\omega = f(z)$ при $z \in \xi$

<u>Док-во:</u> В силу $f'(z) \neq 0$ при $z \in \xi$, отображ-е, осущ-е $f(z)$ во всех т. обл. ξ обл. св-ми сохр-я углов и пост-ва растяжений. ч.т.д.

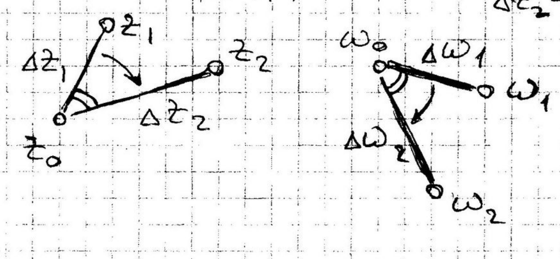
<u>Обратная:</u> $f(z)$ осущ. конф. отобр. обл. ξ к. пл-ти z на G к. пл-ти ω и огр. в ξ. Тогда $f(z)$ – однолистн. и ан. в ξ, причем $f'(z) \neq 0$ при $z \in \xi$

<u>Док-во:</u> т.к. осущ-е отобр. – конф., то оно явл. взаимно однозн. и в $\forall z_0 \in \xi$ вып. св-ва сохр. углов и пост-ва растяж.

$\Rightarrow \forall z_1, z_2 \in$ окрестности т. z_0 с точностью до ∞-малых величин:

$\arg \Delta\omega_2 - \arg \Delta\omega_1 = \arg \Delta z_2 - \arg \Delta z_1$, и

(1) $\left|\frac{\Delta\omega_2}{\Delta z_2}\right| = \left|\frac{\Delta\omega_1}{\Delta z_1}\right| = K \neq 0$. $\Delta z_1 = z_1 - z_0$
$\Delta z_2 = z_2 - z_0$



№71. (2) углы в z_0 и ω_0 равны по абс. величине и по направлению.

пусть $\arg \frac{\Delta\omega_2}{\Delta z_2} = \alpha \Rightarrow = \arg \frac{\Delta\omega_1}{\Delta z_1}$.

$\Rightarrow$ с точностью до ∞-малых из (1) и вышесказ.:

$$\frac{\Delta\omega_2}{\Delta z_2} = \frac{\Delta\omega_1}{\Delta z_1} = k e^{i\alpha}. \quad (2)$$

В силу произв-ти z_1 и z_2 в окр. z_0 соотнош. (2) озн., что $\exists \lim\limits_{\Delta z \to 0}\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta z}\right)$.

этот lim по опред. явл. $f'(z_0)$. т.к. $k \neq 0$ то она $\neq 0$:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \underline{f'(z_0)} \neq 0.$$

т. z_0 - произв. т. $\xi \Rightarrow$

$f(z)$ - ан. в ξ и $f'(z) \neq 0$ при $z \in \xi$.

из взаимной однозн. отображ-я $\Rightarrow$ однолистность $f(z)$.

ч.т.д.