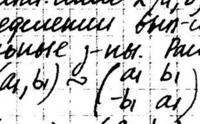
1. Операция сложения комплексных чисел. Ее геометрическая интерпретация. Неравенства треуг-ка

Суммой компл. чисел $z_1=(a_1,b_1)$ и $z_2=(a_2,b_2)$ называется такое компл. число $z=(a;b)$, для которого $a=a_1+a_2$; $b=b_1+b_2$. При таком определении сохраняются переместит. и сочетат. з-ны сложения. Соответствие между множеством всех компл. чисел и плоскими векторами позволяет отождествить операции сложения и вычитания комп. чисел с соотв. операциями над векторами. При этом можно устанавливать ся нер-ва треугольника:



$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

$|z_1-z_2| \ge |z_1|-|z_2|$

В общ. виде: $|z_1|-|z_2| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1|+|z_2|$

2. Операция умножения компл. чисел. Геом. интерпретация. Связь модулей и аргументов.

Произведением компл. чисел $z_1(a_1,b_1)$ и $z_2(a_2,b_2)$ наз-ся компл. число $z(a;b)$: $a_1a_2-b_1b_2=a$; $a_1b_2+a_2b_1=b$; при этом определении вып-ся переместит., сочетат. и распределительные з-ны. Рассм. изоморфизм:

$$(a_1,b_1) \sim \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}; \quad (a_1,b_1)(a_2,b_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} =$$

$$(a_2,b_2) \sim \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} a_1a_2-b_1b_2; & a_1b_2+b_1a_2 \\ -(a_1b_2+b_1a_2); & a_1a_2-b_1b_2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim (a_1a_2-b_1b_2;\ a_1b_2+b_1a_2);$$

Для выполнения операции умножения удобно исп-ть триг. форму компл. числа.

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=z_1 z_2=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=\rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+(-1)\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+\rho_1\rho_2 i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_2\sin\varphi_1)=$$
$$=\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))=\rho_1\rho_2\exp(i(\varphi_1+\varphi_2));$$

$\Rightarrow \rho=\rho_1\cdot\rho_2$; $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$; т.е. модуль произведения равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргум-в. Именно такой вектор и получается на компл. пл-ти.

3. В случае деления компл. чисел при $\rho_2 \ne 0$

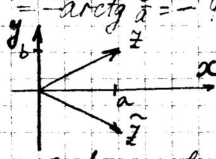
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\exp(i(\varphi_1-\varphi_2));$$

4. Операция комплексного сопряжения. Геом. интерпре-
5. тация. Связь модуля и аргумента.

$\exists\ z=a+ib$, тогда $\bar{z}=a-ib$ – комплексносопр. число к z.

Компл. сопр. числа имеют один и тот же модуль, а значения их аргументов различаются знаком.

$\rho(z)=\rho(\bar{z})=\sqrt{a^2+b^2}$; $\varphi(z)=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$; $\varphi(\bar{z})=\operatorname{arctg}\frac{-b}{a}=$
$=-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}=-\varphi(z)$;



Вещ. части компл. сопр. чисел совпадают, а мнимые – противоположны по знаку.
Сумма и произв. компл. сопр. чисел – действительное число.

6. Операция возведения компл. числа в целую степень. Изменение модуля и аргумента. Ф-ла Муавра.

Так как $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $\arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2$, то индуктивно получаем ф-лу Муавра

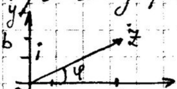
$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ – ф-ла Муавра

$|z^n|=|z|^n$, $\arg z^n=n\arg z$.

7. Формы записи компл. числа. Модуль и аргум. Ф-ла Эйлера.

$z=a+ib$; $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$ – модуль, неотрицат. веществ. число; $\arg z=\operatorname{arctg} b/a$ – не определен для числа ноль с $|0|=0$.

$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$



$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ – триг. запись.

$(a;b)\mapsto\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}$; Разложим в ряд:

$\exists\ e^{\alpha}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$, $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, (1)

$\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\cos z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$;

$\exists\ z=it$, разбиваем абс. сход. ряд (1) на сумму двух рядов: $e^{it}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}+i\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$, т.е.

$e^{it}=\cos t+i\sin t$ – ф-ла Эйлера

8. Если $z = z_1^n$, то $\rho = \rho_1^n$ и $\varphi = n\varphi_1$. Комп. число $z_1 = \sqrt[n]{z}$ наз-ся корнем n-й степени из к.ч. z, если $z = z_1^n$. Из этого определения $\Rightarrow$ $\rho_1 = \sqrt[n]{\rho}$, $\varphi_1 = \varphi/n$. т.к. аргумент к.ч. определен с точностью до аддит. слагаемого, то $\varphi_k = \varphi/n + 2\pi k/n$. Число различных корней n-й степени из к.ч. z равно n. Точки на комп. плоскости, соотв. различным значениям корня n-й степени расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окр-ть $r = \sqrt[n]{\rho}$ с центром в т. $z = 0$. Соотв. значения φ_k получаются при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$;

9. $z = a + ib$; $\rho^2 = a^2 + b^2$; $tg\,\varphi = b/a$;

10. см п.5.

11. $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = (x^2+y^2) + i2xy$

Ф-я однолистная, если в разл. т. z области G она принимает различные значения.

$f(z)$ - однозначная, аналитичная и однолистная.

12. $f(z) = 1/z = 1/(x+iy) = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{-y}{x^2+y^2}$

Аналитична всюду, кроме т. $z=0$.

Однолистна.

13. $f(z) = z + (z)^{-1}$ - аналитична всюду, за искл. $z=0$. Найдем области однолистности. Положим, что две различ. точки ком. пл-ти $z_1 \neq z_2$ переводятся в одну и ту же точку пл-ти ω ф-ей $f(z)$

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}, \quad z_1 - z_2 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}, \text{ т.к. } z_1 \neq z_2, \text{ то}$$

Полученное соотношение означает, $\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 1$ что областями однолистности ф. Жуковского яв-ся, в частности, области внутри ($|z|<1$) и вне ($|z|>1$) единичного круга.

14. $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$;

Аналитична на всей к.пл. (усл-я К-Р.)

Яв-ся периодичной с $T = 2\pi i$, т.к. $\forall\, n \in \mathbb{Z}$:

$$e^{z+2\pi i n} = e^x(\cos(y+2\pi n) + i\sin(y+2\pi n)) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z;$$

Из периодичности $\Rightarrow$ неоднолистность

Выясним, в каких областях она однолистна.

$\exists$ $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$. Т.к. $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, равенство $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 + 2\pi n$, или $z_1 - z_2 = 2\pi n i$

Для взаимной однозначности отображения $\omega=e^z$ в D необходимо и достаточно, чтобы D не содержала никакой пары точек, что $z_1-z_2=2\pi n i$
В частности, этому условию удовл. любые горизонт. полоса шириной 2π $\{z: -\infty<x<+\infty;\ 2\pi k<y<2\pi(k+1)\}$ $k=0;\pm1;\pm2,\dots$

Каждой такой полосе соотв. совокупность значений $\omega=e^z=e^x e^{iy}=\rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \rho=e^x,\ \theta=y$, имеем:
$0<\rho<\infty;\ 2\pi k<\theta<2\pi(k+1)$. Эти значения ω заполняют всю комплексную плоскость с разрезом по действительной положительной полуоси. При этом прямые $y=y_0$ переходят в лучи $\theta=y_0$, а интервалы $x=x_0$, $2\pi k<y<2\pi(k+1)$ в окружности $\rho=e^{x_0}$ с выколотыми точками на полуоси $u>0$.

15. $f(z)=\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\dfrac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i}=\dfrac{e^{ix}\frac{1}{e^y}-e^{y}e^{-ix}}{2i}=$

$=\frac{-1}{2}i\left[(\cos x+i\sin x)\frac{1}{e^y}-e^y(-i\sin x+\cos x)\right]=$

$=\frac{-i}{2}\left(+e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^y(\cos x-i\sin x)\right]=$

$=\frac{-i}{2}\left(e^{-y}\cos x+ie^{-y}\sin x-e^y\cos x+ie^y\sin x\right)=$

$=-i/2\left(e^{-y}\cos x-e^y\cos x\right)+\left(e^{-y}\sin x+e^y\sin x\right)\frac{1}{2}=$

$=\frac{1}{2}\sin x\left(e^y+e^{-y}\right)-\frac{i}{2}\left(e^{-y}-e^y\right)\cos x=\operatorname{ch}y\sin x+i\operatorname{sh}y\cos x$

однозначна, аналитична.

$\sin z_1=\sin z_2$

$\frac{1}{2}\left[\sin x_1\left(e^{y_1}+e^{-y_1}\right)-i\left(e^{-y_1}-e^{y_1}\right)\cos x_1\right]=\frac{1}{2}\left[\sin x_2\left(e^{y_2}+e^{-y_2}\right)-i\left(e^{-y_2}-e^{y_2}\right)\cos x_2\right]$

$$\begin{cases}\sin x_1\left(e^{y_1}+e^{-y_1}\right)=\sin x_2\left(e^{y_2}+e^{-y_2}\right)\\ \cos x_1\left(e^{y_1}-e^{-y_1}\right)=\cos x_2\left(e^{y_2}-e^{-y_2}\right)\end{cases}$$

Проще: $\sin z_1-\sin z_2=2\sin\frac{z_1-z_2}{2}\cos\frac{z_1+z_2}{2}=0$

$$\left[\begin{array}{l}z_1-z_2=2\pi n,\ n=\pm1,\pm2;\pm3;\pm4\dots\\ z_1+z_2=\pi(2k+1),\ k=0,\pm1,\dots\end{array}\right.$$

Обл. однолистности — $\forall$ обл., не содерж. z_1 и z_2, для к-х $z_1-z_2=2\pi n$, $n=\pm1,\pm2,\dots$
$z_1+z_2=(2k+1)\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$

16. $f(z)=\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{ix-y}+e^{-ix+y}\right)=$
$=\frac{1}{2}\left(e^{ix}e^{-y}+e^{-ix}e^{y}\right)=\frac{1}{2}\left((\cos x+i\sin x)e^{-y}-e^{y}(\cos x-i\sin x)\right)=$
$=\frac{1}{2}\left[\cos x(e^{-y}-e^{y})+i\sin x(e^{-y}+e^{y})\right]$; аналитична, однозначна. $f(z)=\operatorname{ch}y\cos x+i\operatorname{sh}y\sin x$

$\cos z_1=\cos z_2$;

$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{z_1+z_2}{2}=0\\ \sin\frac{z_1-z_2}{2}=0\end{array}\right.$ $\quad z_1+z_2=2\pi n,\ n=\pm1,\pm2,\dots$; $\quad z_1-z_2=2\pi n,\ n=\pm1,\pm2,\dots$

Обл. однолистности – $\forall$ обл., не содержащ. т. z_1 и z_2 для к-х $z_1+z_2=2\pi n$, $z_1-z_2=2\pi n$, $n=\pm1,\pm2\dots$

17. $f(z)=\sqrt{z}=\sqrt{\rho}\,e^{i\varphi\cdot\frac{1}{2}+\pi k i}=Re^{i\Phi}$, $R=\sqrt{\rho}$; $\Phi=\frac{\varphi}{2}+\pi k$
Каждому z, отличному от 0 и ∞, соответствует 2 разл. корня. Числа 0 и ∞ имеют по 1 корню.
$z_0=\sqrt{\rho}\exp(i\varphi/2)$ и $z_1=\sqrt{\rho}\exp\left(\frac{i}{2}(\varphi+2\pi)\right)$ – ветви многозначной функции $z(\omega)=\sqrt{\omega}$;

18. $f(z)=\operatorname{Ln}(z)=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+$ $+i(\operatorname{arctg}y/x+2\pi k)$ $k=0,\pm1,\pm2,\dots$
ф-я многозначная, но в зависимости от k можно выделить однозначные ветви, отличающиеся постоянными слагаемыми, кратными $2\pi i$

19. $F(z)=\ln z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\operatorname{arctg}y/x$; однозначна, аналитична на всей компл. пл-ти. Область однолистности: $\forall$ обл. без нуля, чтобы $z_1-z_2\neq0$ без нуля.

20. $f(z)=\operatorname{Ln}z$, $z=\rho e^{i\varphi}$, $\operatorname{Ln}z=\ln\rho+i(\varphi+2\pi k)$, $k=0;\pm1;\pm2\dots$
ф-я многозначная, но однозначные ветви можно выделить в зависимости от k, к-е будут отличаться др. от др. постоянными слагаемыми, кратными $2\pi i$

21. $f(z) = \ln z$, $z = \rho e^{i\varphi}$

$f(z) = \ln\rho + i\varphi$ – ф-я однозначна, аналитична на всей компл. пл-ти кроме т. $z=0$.

Обл. однолистности – ∀ обл. без 0, где $z_1 - z_2 \neq 0$.

22. $f(z) = z^a = \left(e^{\ln z}\right)^a = e^{a\ln z} = \left[z = \rho e^{i\varphi}\right]$

$= e^{a(\ln\rho + i(\varphi + 2\pi k))}$; $k = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots$

$\forall a \in \mathbb{C}$ опред. ф-я $f(z)$

23. Пусть дана посл-ть к.ч. $\{z_n\}$, такая, что $\forall R>0$ $\exists$ номер N, такой, что $\forall n>N$ $|z_n|>R$ – неограниченно возрастающая посл-ть. Такая посл-ть, как и всякая ее п/п, предела не имеет. Введем к.ч. $z=\infty$ и будем считать всякую неограниченную возр-ую посл-ть сходящейся к числу, которому мы поставим в соответствие бесконечно удаленную точку компл. пл. Аргумент, так же как и действ. и мним. части компл. числа $z=\infty$, не определен.

Из элементов неогр. возраст. посл-ти $\{z_n\}$ составим посл-ть $\{1/z_n\}$. Она сходится к точке $z=0$, $\exists N$ т.что $\forall n\geq N$ $|1/z_n|<\varepsilon$ $\forall \varepsilon>0$. Верно и обратное.

В связи с этим полагают $1/\infty=0$; $1/0=\infty$

$z\cdot\infty=\infty$, $z\neq 0$; $z+\infty=\infty$; $z/\infty=0$ при $z\neq\infty$

24 Однозначная функция комплексной перем. z заданная в области P, определяется законом, ставящим каждому $z\in P$ в соответствие определенное комплексное число ω. $\omega=az+b$; $\omega=1/z$;

$f(z)$ – однолистная f в обл. P, если в различных точках этой области она принимает различные значения.

$\omega=z^2$ явл-ся однолистной в $D=\{z: \operatorname{Re} z>0\}$

$\omega=\frac{1}{2}(z+1/z)$ – однолистна в круге $|z|<1$

25. Пусть $f(z)$ отображает обл. D в E. Однолистность означает, что каждая т. $\omega\in E$ имеет только один прообраз в D. Поэтому отображение D на E, осущ. однолистной ф-ей – взаимнооднозначное.

Пусть $\omega=f(z)$ отображает D на E. Обратной к $\omega=f(z)$ ф-ей (вообще говоря, многозначной), $z=g(\omega)$, определен. на E, которая каждому к.числу $\omega\in E$ ставит в соотв. все к.ч. $z\in D$, что $f(z)=\omega$. Иными ф-я, обратная к $\omega=f(z)$ ф-я – правило, по к-му каждой $\omega\in E$ соотв-ют все ее прообразы $z\in D$.

Если $\omega=f(z)$ однолистна в D, то обратная ф-я однозначна и также однолистна в E. Если $\omega=f(z)$ неоднолистна, то обратная ф-я будет многозначной

Теорема: если $\omega=f(z)$ однолистна и аналитична в D, и отображает D на E, и $f'(z)\neq 0$, то обратная ф-я $z=g(\omega)$ также аналитична в обл. E и $g'(\omega)=1/f'(z)$

26. Пример. $w = f(z) = \operatorname{Re} z$ — не имеет производной ни в одной точке. Функция наз-ся диф-ой, если существует предел $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ и он не зависит от способа стремления $\Delta z \to 0$, т.е. от способа приближения т. $z = z_0 + \Delta z$ к т. z_0. Требование диф-ти ф-ии компл. перем. в т. z_0 накладывает условие на поведение Re и Im частей этой ф-ии в окрестности т. (x_0, y_0). Эти условия — усл. Коши-Римана: $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$; $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$;

27. Если $f(z)$ диф-ма во всех точках нек. области G, а её производная непрерывна в этой области, то $f(z)$ наз-ся аналитической ф-ей в обл. G.
Пример неаналит. ф-ии: $f(x,y) = (2x^2 + xy) + i(x+3)$; Не выполн. усл. Коши-Римана:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x + y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

28. См. 27.

29. $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$; Усл. Коши-Римана:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x};$$

30. Усл. Коши-Римана в полярных коорд-х:
$$f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$$
$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho};$$

31. Условие Коши-Римана для модуля и аргумента
$$f(z) = R(x,y)\exp(i\Phi(x,y)) = R\cos\Phi + iR\sin\Phi;$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial \Phi}{\partial x};$$

32. Необходимым и достаточным условием аналитичности $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в G является существование в G непрерывных частных производных, связанных соотношением Коши-Римана.

33. $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$;

$f'(z) = U_x(x,y) + iV_x(x,y) = V_y(x,y) + iV_x(x,y) = U_x(x,y) - iU_y(x,y) = V_y(x,y) - iU_y(x,y)$;

34 Св-ва аналит. ф-ии:

1) Если f аналит. в G, то она в G непрерывна
2) Если f_1 и f_2 - аналит. ф-ии в G, то их сумма, произведение также аналит. ф-я в G, а $\varphi(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ аналит. всюду, где $f_2(z) \neq 0$.
3). Если $w = f(z)$ аналит. в D, причем обл. ее значений G - обл. опред. аналит. ф-ии $t = \varphi(w)$, то функция $F(z) = \varphi(f(z))$ - аналит. ф-я в D.
4) Если $w = f(z)$ является аналит. ф-ей в D, причем $|f'(z)| \neq 0$ в окрестности нек-й т. $z_0 \in D$, то в окрестности т. $w_0 = f(z_0)$ обл. G значений ф-ии $f(z)$ определена обратная ф-я $z = \varphi(w)$, являющаяся аналит. ф-ей к. перем. w. При этом имеет место

$$f'(z_0) = \frac{1}{\varphi'(w_0)};$$

5) Пусть в G задана $U(x,y)$, являющ-ся действительной частью аналит. ф-ии $f(z)$. Тогда мнимая часть этой ф-ии определена с точностью до аддитивной постоянной, причем по заданной $U(x,y)$ однозначно определяется полный дифф-л неизвестной ф-ии $V(x,y)$: $dV = U_x\,dy - U_y\,dx$
6) $\exists$ $f(z)$ аналитична в D. Рассмотрим семейства кривых $U(x,y) = C$ и $V(x,y) = C$ - линии уровня Re и Im частей $f(z)$. С помощью усл. К-Р. видно:

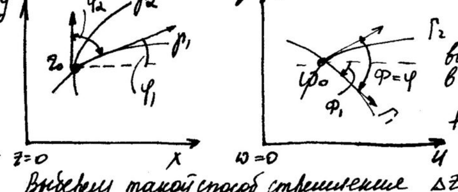
$$\operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} V = U_x V_x + U_y V_y = -U_x U_y + U_y U_x = 0.$$

Т.к. grad $\perp$ линии уровня, то $\Rightarrow$ $U(x,y) = C \perp V(x,y) = C$

35. $f(z)$ наз-ся аналитической (регулярной, голоморфной) в замкнутой обл. $\overline{D}$, если ее можно продолжить в некоторую более широкую область D, $\overline{D} \subset D$, до аналитической в D функции.

36. Re и Im части аналитической функции являются гармоническими функциями.

37.38. Геом. смысл производной аналит. функции.
Пусть $f(z)$ явл-ся аналит. ф-ей в D. Выберем $z_0 \in D$ и проведем через нее $\forall$ гладкую кривую $\gamma_1 \in D$. $f(z)$ производит отображение области D к. пл. z на нек. обл. G комп. пл. w. Пусть $z_0 \to w_0$, а $\gamma_1 \to \Gamma_1$. По условию, $\exists\ f'(z)$ в т. z_0.



Положим, $f'(z_0) \neq 0$, тогда можно представить компл. число $f'(z_0)$ в показательной форме

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = k e^{i\alpha} \qquad (1)$$

Выберем такой способ стремления $\Delta z \to 0$, при котором точки $z = z_0 + \Delta z$ лежат на кривой γ_1. Тогда соотв. им точки $w = w_0 + \Delta w$ лежат на Γ_1. Компл. числа Δz и Δw изображаются векторами секущих к кривым γ_1 и Γ_1 соотв-но. Заметим, что $\arg \Delta z$ и $\arg \Delta w$ имеют геом. смысл углов соотв-х векторов с положит. направлениями осей x и u, а $|\Delta z|$ и $|\Delta w|$ – длины этих в-в. При $\Delta z \to 0$ секущие переходят в касательные. Из (1) $\Rightarrow$ $\alpha = \arg f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \Phi_1 - \varphi_1$. Т.е. аргумент α производной имеет геом. смысл разности угла Φ_1 вектора касательной к Γ_1 в т. w_0 с осью u и угла φ_1 вектора касательной к γ_1 в т. z_0 с осью x. Т.к. производная не зависит от способа предельного перехода, то эта разность будет такой же $\forall$ другой кривой, проходящей через т. z_0 (хотя значения самих углов могут измениться). Отсюда следует, что при отображении $f(z)$, что $f'(z_0) \neq 0$, угол $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ между любыми кривыми γ_1 и γ_2, пересек-ся в т. z_0, равен углу $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ между их образами Γ_1 и Γ_2, пересекающимися в т. $w_0 = f(z_0)$.

Аналогично $k = |f'(z_0)| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$. То есть с точностью до величин более высокого порядка малости имеет место р-во: $|\Delta w| = k|\Delta z|$. Это соотношение не зависит от выбора γ_1. Геом. смысл состоит в том, что при отображении, осущ. ф-ей (аналит.), что $f'(z_0) \neq 0$, беск. малые линейные элементы преобразуются подобным образом, причем $|f'(z_0)|$ определяет коэф-т преобразования подобия.

39. ∃ $f(z)$ явл-ся аналитической в G и обращается в нуль в различных точках $z_n \in G$, $n=1,2,\dots$ Если посл-ть $\{z_n\}$ сходится к $a \in G$, то функция тождественно равна нулю в G.

40. 1) Функция $f(z) \not\equiv 0$, аналит-я в G, в ∀ замкнутой ограниченной подобласти $\bar{G}' \subset G$ имеет конечное число нулей.

2) Если т. $z_0 \in G$ — нуль бесконечного порядка, т.е. в разложении $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ в окрестности т. z_0 все $c_n \equiv 0$, то $f(z) \equiv 0$ в G.

3) Аналит. ф-я может иметь бесконечное число нулей лишь в открытой или неограниченной области.

41. Пусть $f(z)$ и $\varphi(z)$ являются аналитическими в D. Если в D существует сходящаяся к нек. точке $a \in D$ посл-ть различных точек $\{z_n\}$, в которых значения функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ совпадают, то $f(z) \equiv \varphi(z)$ в D.

42.

43 ∃ $f(z)$-аналитична в G. $z_0 \in G$ — нуль $f(z)$, если $f(z_0)=0$. Из разлож-я в окр. z_0 в ряд: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \Rightarrow$ что в данном случае $c_0 = 0$. Если $c_{k-1}, c_{k-2}, \dots, c_0 = 0$, а $c_k \neq 0$, то z_0 — нуль k-го порядка. В нуле k-го порядка не только сама ф-я, но и ее первые $k-1$ производных $=0$, а k-я произв. отлична от нуля. В окрестности нуля порядка k разложение $f(z)$ в степ. ряд имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z-z_0)^n = (z-z_0)^k \varphi(z).$$

где $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z-z_0)^n$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$. Последний ряд разлом. аналит. ф-ии $\varphi(z)$ сходится в том же круге что и исходный

44. Пусть $f(z)$ задана в G, ограниченной Γ. т. $z_0 \in \overline{G}$ — правильная точка $f(z)$, если $\exists$ сходящ. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, который в общей части обл. G и своего круга сходимости $|z-z_0| < \rho(z_0)$ сходится к $f(z)$; $\rho(z) > 0$
Точки $z \in \overline{G}$, не явл-ся правильными — особые.
Пример: т. $z=0, \infty$ явл-ся особыми точками функции $\sqrt[n]{z}$; $\ln z$;

45. $f(z)$ аналитичная в $\overline{D}$ имеет в каждой внутренней точке производные всех порядков, к-е:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

46.] на к.п. задана кусочно-гладкая кривая C конечной длины L, параметрически: $\xi = \xi(t)$; $\eta = \eta(t)$, где ξ, η — кусоч.-гладкие функции $t \in R$, $\alpha \le t \le \beta$, $(\xi'(t))^2 + (\eta'(t))^2 \neq 0$; Задание коорд. ξ, η эквив-но заданию компл. функции: $\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$.] в каждой точке ζ кривой C определено значение $f(\zeta)$. Разобьем кривую C на n частичных дуг точками $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$.] $\Delta\zeta_i = \zeta_i - \zeta_{i-1}$
Составим сумму: $S(\zeta_i, \zeta_i^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i^*)\Delta\zeta_i$, где ζ_i^* — $\forall$ точка i-й част. дуги.
Если при $\max|\Delta\zeta_i| \to 0$ $\exists \lim S$, не зависящий от способа разбиения и выбора точек ζ_i^*, то этот предел наз-ся интегралом от $f(\zeta)$ по кривой C и обозначается: $\int_C f(\zeta)\,d\zeta$;

47. 1) $\int\limits_{AB} f(t)dt = -\int\limits_{BA} f(t)dt$

2) $\int\limits_{C_1} f(t)dt + \int\limits_{C_2} f(t)dt = \int\limits_{C_1+C_2} f(t)dt$; 3) $\int\limits_{C} a f(t)dt = a\int\limits_{C} f(t)dt$

4) $\int\limits_{C} [f_1(t)+f_2(t)]dt = \int\limits_{C} f_1(t)dt + \int\limits_{C} f_2(t)dt$

5) $\left|\int\limits_{C} f(t)dt\right| \le \int\limits_{C} |f(t)|dS$ справа – кривол. инт. I рода, dS – диф-л дуги, интеграл

48) $\int\limits_{C} f(z)dz = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ $z=\varphi(t)$ – аналит. ф-я, устанавл. взаимн. однозн. соотв. между кривыми Г и С

49) $I = \int\limits_{C_\rho} \frac{dt}{t-z_0}$, $C_\rho : |z-z_0| = \rho_0$

Кривая C_ρ – окружность радиуса ρ_0 с центром в z_0, обходимая против час. стрелки. Воспользуемся пар-им заданием кривой C_ρ: $t = z_0 + \rho e^{i\varphi}$; $0 \le \varphi \le 2\pi$

$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi}d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$, этот интеграл не зависит ни от ρ, ни от z_0

50. $\int\limits_{C} f(z)dz = \int\limits_{C} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

51. Теор. Коши для односвязной области: Пусть в односвязной области G задана однозначная аналитическая ф-я $f(z)$. Тогда интеграл от этой ф-ии по $\forall$ замкн. контуру $\Gamma \in G$ равен нулю.

52. Др. формулировка т. Коши: Если $f(z)$ аналитична в односвязной области G, ограниченной кусочно-гладким контуром C, и непрерывна в $\bar{G}$, то интеграл от $f(z)$ по границе C области G $= 0$.

53. Т. Коши для многосвязной области. $\exists$ $f(z)$ – аналит. функция в многосв. обл. G, ограниченной извне контуром C_0, а изнутри контурами $C_1, \dots, C_n$, и $f(z)$ – непрерывна в $\bar{G}$. Тогда $\int f(\zeta)d\zeta = 0$, где C – полная граница обл. G сост. из $C_0, C_1, \dots, C_n$ причем обход границы C происходит в положит. напр.

54. ∃ $f(z)$ - аналитическая ф-я в односвязной области G. Фиксируем в этой обл. некоторую т. z_0 и обозначим через $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ интеграл по какой-либо кривой, целиком лежащей в G и соед. z и z_0. В силу т. Коши этот интеграл не зависит от выбора кривой интегрирования в G и явл-ся однозначной функцией z:

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \Phi(z);$$

55 Аналит. ф-я $\Phi(z)$ наз-ся первообразной функции $f(z)$ в обл. G, если в этой области имеет место соотношение: $F'(z) = f(z)$

56) $\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi = F(z_2) - F(z_1)$, где $F(z)$ - любая первообразная для f

57) Формула Коши-Адамара: радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ опред-ся формулой $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ - как верхний предел пос-ти $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ (наибольшая предельная точка)

58) Интегр. формула Коши. ∃ $f(z)$ аналитична в односвязной (или n-связной) области, тогда значение $f(z)$ в ∀ внутр. точке $z \in$ области, выражается через ее значения $f(\xi)$ в точках границы Γ по ф-ле

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)}$$

59) Формула среднего значения выражает значение аналит. функции в центре окружности как среднее из ее граничных значений.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R_0} \int_{C_{R_0}} f(\zeta)\,ds$$

60. Принцип максимума модуля аналит. ф-ии.
] $f(z)$ яв-ся аналит. в G и непрерывна в $\overline{G}$. Тогда или $|f(z)| \equiv const$, или максимальное значение $|f(z)|$ достигается только на границе области.

61. Принцип минимума функции имеет место, если аналит. ф-я $f(z)$ не равна ни в одной точке G нулю и непрерывна в $\overline{G}$;

~~62.] L – кусочно-гладкая кривая, $\varphi(z)$ непрерывна вдоль этой кривой~~
~~$F(z) = \int_L \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\xi - z}$, – интеграл по замкн. конт., при Γ, целиком лежащ. в G~~

62. Интеграл вида $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta$ по замкн. контуру Γ, целиком лежащему в обл. G аналитичности $f(z)$, имеет смысл $\forall$ положения т. z_0 при условии, что эта точка не лежит на контуре Γ. При этом если z_0 лежит внутри Γ, $J = f(z_0)$, если вне Γ, $J = 0$

63. $F(z)$, определяемая интегралом типа Коши
$F(z) = \int_L \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\xi - z}$ имеет в $\forall$ точке $z \notin L$ производную $\forall$ порядка:
$$F^{(n)}(z) = n!\int_L \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^{n+1}};$$

64. Св-ва интегралов типа Коши: как и у обычных + дифф-е п. 63.

65.] $f(z)$ аналит. в D и непр. в $\overline{D}$. Тогда во внутр. точках D $\exists$ произв. $\forall$ порядка ф-ии $f(z)$, причем:
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi$$

66. т. Морера. $\exists$ $f(z)$ непрерывна в односвязной обл. G и интеграл по $\forall$ замкн. контуру $\in G$, равен 0. Тогда $f(z)$ – аналитична в G;

67. т. Лиувилля. Пусть на всей к.пл-ти $f(z)$ аналитична, а ее модуль равномерно ограничен. Тогда $f(z) \equiv const$

68. Функция комплексной переменной, аналитическая на всей компл. пл. $(z \neq \infty)$ наз-ся целой ф-ей. На полной пл-ти целая ф-я может иметь лишь счетное число нулей, причем предельной точкой этого мн-ва яв-ся бесконечно удал. точка кп.

69. $\exists$ задана ф-я 2х к.переменных $\varphi(z, \zeta)$ однозначно определенная для значений компл. переменной $z = x+iy$ из обл. G и для значений к.пер. $\zeta = \xi + i\eta$, принадлежащих некоторой кусочногладкой кривой C. Взаимное расположение G и C произвольно. Пусть: $\varphi(z,\zeta)$ $\forall \zeta \in C$ яв-ся аналит. ф-ей z в G, функция $\varphi(z,\zeta)$ и $\partial\varphi/\partial z$ яв-ся непрер-ми ф-ми по совокупности перем-х z, ζ при произвольном изменении z в обл. G и ζ на кривой C. Второе условие означает, что Re и Im части функции $\partial\varphi/\partial z$ непрерывны по совокупности перем-х x, y, ξ, η;

Интеграл от $\varphi(z,\zeta)$ по кривой C $\exists$ при $\forall z \in G$ и яв-ся ф-ей компл. пер-й z:

$$F(z) = \int_C \varphi(z,\zeta)d\zeta = U(x,y) + iV(x,y)$$

70. $F(z) = \int_C \varphi(z,\zeta)d\zeta = U(x,y) + iV(x,y)$ — **аналит. ф-я** компл. перем. z в обл. G, причем производную $F(z)$ можно вычислить при помощи диф-я под знаком интеграла: $F'(z) = U_x(x,y) + iV_x(x,y) = \int_C U_x d\xi - U_x d\eta + i\int_C V_x d\xi + U_x d\eta = \int_C \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\zeta)d\zeta$;

71. Пусть задана посл-ть к.ч. $z_n = x_n + iy_n$. Числовым рядом наз-ся выражение $z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Сумма S_n первых n членов ряда – n частичная сумма ряда. Предел посл-ти $\{S_n\}$ – сумма ряда. Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k$ наз-ся n-м остатком ряда.

72. Ряд наз-ся сходящимся, если сходится посл-ть его частичных сумм, т.е. $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$. Если $\lim \nexists$ или равен ∞, то ряд расходится.
Пример: расх-ся ряд: $\sum \frac{\cos in}{2^n}$ по Даламберу.

73. Крит. Коши. Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ необх. и дост-но $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon)$ что $\forall n > N \; \forall p \geq 0$ выполнялось:
$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \varepsilon$;

74. Необходимый признак сходимости ряда является требование: $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. (обратн. неверно)

75. Признак Даламбера: если $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = l$
если $l < 1$, то ряд сх-ся абсолютно.
если $l > 1$, то ряд расходится.
Предельная форма: ряд $\sum |z_n|$ сходится, если начиная с нек. номера N отношение $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq l < 1$ $\forall n \geq N$
если начиная с нек. номера N $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \geq 1$, то ряд расх-ся.

76. Радикальный признак Коши. Если $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = l$
если $l < 1$, то ряд сх-ся абсолютно.
если $l > 1$, то ряд рас-ся – предельная форма.

Согласно признаку Коши ряд сх-ся если $\sqrt[n]{|z_n|} \leq q < 1$ для всех $n \geq N$. Если же начиная с нек. номера N $\forall n \geq N$ $\sqrt[n]{|z_n|} \geq 1$ то ряд расх-ся.

77.] в G определена беск. посл-ть однозначных функций компл. перем. $\{U_n(z)\}$. Выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ наз-ся функцион. рядом. При фиксировании значение $z_0 \in G$ ряд превращается в числовой. Функц. ряд наз-ся сходящимся в обл. G если при $\forall z \in G$ соотв-ий ему числовой ряд сходится. Если функц. ряд сх-ся в области G, то в этой области можно определить однозначную функцию $f(z)$, значение которой в каждой точке обл. G равно сумме соотв-го числ. ряда. Эта ф-я – сумма ряда в G

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} U_k(z) \right| < \varepsilon \text{ при } n \geq N(\varepsilon, z)$$

Сумма U_n первых n членов ряда – n частичная сумма ряда. Ряд $\sum_{k=n+1} U_k(z)$ наз-ся n-м остатком ряда

80 Критерий Коши: для того, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} U_k(z)$ сходился равномерно в G, необх. и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$, что одновременно во всех точках обл. G выполнялось соотношение:

$$|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon \quad \text{при } n \geq N \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

78 Ряд $\sum U_k$ сх-ся в G, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N$

$$|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

79 Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_k(z)$ наз-ся равном. сходящимся в G если для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon)$ нерав-во

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} U_k(z) \right| < \varepsilon$$ вып-ся сразу для всех точек z области G;

81. Мажорантный признак В-са: если всюду в G члены функц. ряда могут быть мажорированы членами абсолютно сход-ся числового ряда, то указ. функц. ряд сх-ся равномерно в G

82. Если функции $U_n(z)$ непрерывны в G а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ сходится в этой области равномерно к $f(z)$, то $f(z)$ также непрерывна в обл. G

83. Если ряд $\sum U_k(z)$ непрерывных ф-й $U_k(z)$ сх-ся равномерно в G к $f(z)$ то интеграл от этой ф-и по $\forall$ кусоч.-гладкой кривой $C \in G$ можно вычислить путем почленного интегрирования:

$$\int_C f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C U_n(\zeta)\,d\zeta;$$

84. Теор. В-са: $\exists$ $U_n(z)$ аналитичны в G, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ сх-ся равномерно в $\forall$ замкн. подобласти $\overline{G'}$ области G к $f(z)$. Тогда: $f(z)$-аналитична в G; $f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(k)}(z)$; ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{(k)}(z)$ сх-ся равномерно в $\forall$ замкнутой подобласти $\overline{G'}$ области G;

85. II т. В-са: $\exists$ ф-ии $U_n(z)$ аналитичны в G, непрерывны в $\overline{G}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ сх-ся равномерно на границе Γ этой области. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)$ сходится равномерно и в $\overline{G}$

86. Т. Абеля для степенного ряда: Если ст. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ сх-ся в нек. точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится и в $\forall$ т. z, удв. условию: $|z-z_0| < |z_1-z_0|$, причем в круге $|z-z_0| \le \rho$ радиуса ρ, меньшего $|z_1-z_0|$ ряд сх-ся равномерно.

87. Рассмотрим точную верхнюю грань R расстояний $|z-z_0|$ от т. z_0 до точек z, в которых сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$. Если $R \neq \infty$ то во всех т. z': $|z'-z_0| > R$ данный степ. ряд расходится. $\exists R>0$, тогда наибольшей обл. сходимости данного ряда яв-ся круг $|z-z_0| < R$. Всюду вне этого круга ряд расх-ся, в точках границы может как сх-ся, так и расходиться. Область $|z-z_0| < R$ $(R>0)$ — круг сходимости степ. ряда, а R - его радиус.

88. Ф-ла Коши-Адамара. R сходимости степ. ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ опред-ся формулой $R = 1/l$, где $l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}$ есть верхний предел пос-ти $\{\sqrt[n]{|C_n|}\}$. Справедлив $\forall l$.

89. Следствие т. Абеля: для всякого степ. ряда $\exists$ такое число R что внутри круга $|z-z_0|<R$ данный ст. ряд сходится, а вне этого круга расх-ся. В круге $|z-z_0|\le\rho<R$ данный степ. ряд сх-ся равном.

90. Степ. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ можно почленно интегр-ть внутри круга сходимости, т.е.

$$\int_{z_0}^{z'} f(z)\,dz = C_0(z'-z_0)+\frac{C_1}{2}(z'-z_0)^2+\ldots+\frac{C_n}{n+1}(z'-z_0)^{n+1}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{n+1}(z'-z_0)^{n+1},$$

где z' – $\forall$ точка внутри круга сходимости. исх. степ. ряда.

Полученный степ. ряд имеет тот же круг сходимости что и исходный ряд.

Степ. ряд можно почленно диф-ть внутри круга сходимости

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} C_n\cdot n(n-1)\ldots(n-k+1)(z'-z_0)^{n-k};$$

91. Коэф. степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ выражаются через значения суммы ряда $f(z)$ и ее производных в центре круга сходимости по формуле:

$$C_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

92. $\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n = \frac{1}{1-(z-z_0)}$, при $(z-z_0)<1$

93. Теорема Тейлора: $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$, может быть представлена в этом круге сходящимся однозначно определенным степенным рядом $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$

94. Интегральная форма для коэф-в ряда Тейлора:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$ где C – $\forall$ замкн. контур, лежащий в $|z-z_0| < R$

95. Радиус сходимости р. Тейлора равен расстоянию от центра z_0 до ближайшей к нему особой точки $f(z)$

96. $$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Здесь $z_0 = 0$; ряды сходятся во всей компл. пл-ти.

97. Теорема о наличии особой точки на границе круга сходимости степенного ряда $\exists$ по крайней мере одна особая точка функции, к к-й сх-ся данный ряд.

98. Ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n$ – ряд Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n_{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}_{(2)};$$

Область его сходимости – общая часть областей сходимости каждого из слагаемых.

(1): обл. сходимости: круг с центром в т. z_0 некотор. радиуса R_1.

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R_1$$

(2): замена: $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$ $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_{-n}\zeta^n$ – обычный степенной ряд, сходящийся внутри своего круга сходимости к некот. аналит. ф-ии $\varphi(\zeta)$

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}\zeta^n, \quad |\zeta| < 1/R_2;$$ или, полагая $\varphi(\zeta(z)) = f_2(z)$

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} \quad |z-z_0| > R_2,$$ если $R_2 < R_1$, то $\exists$ круговое кольцо $R_2 < |z-z_0| < R_1$, в к-м ряд сх-ся к аналит. ф-ии: $f(z) = f_1 + f_2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$;

99. Теорема Лорана. $f(z)$, аналитичная в круговом кольце $R_2 < |z-z_0| < R_1$ однозначно представляется в этом кольце рядом Лорана.

100 Неизолир. особая точка – точка, не отвечающая определению изолированности (102)

В окрестности точки ветвления и неизолир. особой точки нельзя раскладывать ф-ю в ряд Лорана.

101 Т. z_0 наз-ся изолированной особой точкой ф-ии $f(z)$ если $f(z)$ – однозначная и аналитическая в круговом кольце $0 < |z-z_0| < R_1$, а точка z_0 – особая точка $f(z)$

102. Изолир. особ. точка для которой разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окр. т. z_0 не содержит членов с отрицат. степенями разности $(z-z_0)$ наз-ся устранимой особой точкой.

Т. $z=\infty$ наз-ся устранимой для $f(z)$ если разложение не содержит членов с положительными степенями z; $\exists$ конечное предельное значение $f(z)$, не зависящее от способа предельного перехода.

103. Если т. z_0 является устранимой особой точкой аналит. ф-ии $f(z)$, то $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = C_0$, причем $|C_0| < \infty$

В окрестности устранимой особой точки $f(z)$ ограничена и может быть представлена в виде $f(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$, $m \geq 0$, $\varphi(z_0) \neq 0$

104 ∃ р. Лорана ф-ии $f(z)$ в окр. ее изолир. точки z_0 содержит конечное число m членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$, т.е.

$f(z) = \sum_{n=-m} C_n (z-z_0)^n$, то z_0 — полюс порядка m

Точка $z=\infty$ наз-ся полюсом порядка m ф-ии $f(z)$ если разложение $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n z^n$, $R<|z|<\infty$ содержит конечное число m членов с положит. степенями z, т.е. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{m} C_n z^n$, $(m>0)$ или если $f(z)$ неогранич. возрастает по модулю при $z \to \infty$ независимо от способа предельного перехода.

105 Теорема о полюсе. Если т. z_0 является полюсом аналит. $f(z)$, то при $z \to z_0$ модуль ф-ии неограниченно возрастает независимо от способа стремления т. z к z_0.

$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ — предел функции в полюсе.

В окр. т. z_0 $f(z)$ представима в виде: $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$, где $\psi(z)$ — аналит. ф-я, $\psi(z_0) \neq 0$, m — порядок полюса; (мы доопределили в выборе $\psi(z_0) = C_{-m} \neq 0$)

106. ∃ р. Лорана $f(z)$ в окр. ее изолир. точки (особой) z_0 содержит бесконечное число членов с отрицат. степенями разности $(z-z_0)$, т.е.

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$, тогда т. z_0 — существенно особая точка.

Точка $z=\infty$ — сущ. особая точка $f(z)$ если разложение $f(z) = \sum_{n=-\infty} C_n z^n$ $R<|z|<\infty$ содержит бескон. число членов с положит. степенями z. Или если в зависимости от выбора посл-ти $\{z_n\} \to \infty$ можно получить посл-ть значений $\{f(z_n)\}$, сходящ-ся к любому наперед заданному пределу.

107. Теорема Сохоцкого-В-са: Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, в $\forall$ окрестности сущ.-особой точки z_0 функции $f(z)$ найдется хотя бы одна т. z_1, в которой значение ф-ии $f(z)$ отличается от произвольного заданного компл. числа B меньше, чем на ε.

Теор. Сохоцкого: Если z_0 - сущ. особ. точка $f(z)$, то $\forall$ компл. числа A, включая $A = \infty$, найдется $\{z_n\}$, такая что $z_n \to z_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$

Если z_0 - сущ. особ. точка, то $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z \to z_0$

108. Вычетом аналит. ф-ии $f(z)$ в изол. особой точке z_0 наз-ся комплексное число, равное значению инт-ла: $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(\xi)d\xi$ взятому в положит. направлении по любому лежащему в обл. аналит. ф-ии замкнутому контуру γ содержащему единств. особую точку z_0. Если точка правильная или устранимая, то res = 0.

Вычетом аналит. ф-ии $f(z)$ в т. $z = \infty$ наз-ся компл. число, равное значению интеграла:

$$\mathrm{res}_{\infty} f = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^+} f(z)dz = -C_{-1}$$

где C - произвольный контур, замкнутый, вне которого ф-я $f(z)$ аналитична и не имеет особых точек, отличных от ∞. $\Rightarrow$ что если т. $z = \infty$ яв-ся устранимой особой точкой $f(z)$, то $\mathrm{Res}(f(z), \infty)$ может оказаться $\neq 0$, в то время как вычет в конечной устранимой особой точке всегда равен нулю

109 Основная теорема теории вычетов: Пусть функция $f(z)$ аналитична всюду в замкн. области $\bar{G}$ за искл. конечного числа изолиров. особых точек z_k, $k = \overline{1,N}$, лежащих внутри G. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(t)dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f(z), z_k),$$ где Γ^+ представляет собой полную границу области G, обходимую в положит. направлении

110. Вычет в устранимой особой точке равен 0.
Вычет $f(z)$ в $z=\infty$

$$\mathrm{Res}\,(f(z),\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(t)dt = C_{-1}.$$

Если $z=\infty$ — устранимая особая точка, то вычет в ней может быть отличен от 0.

111. Вычет в полюсе первого порядка.

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \qquad \left(f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right)$$

Вычисление вычета в полюсе порядка m:

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right],$$

112. Если z_0 — существ. особая точка, то

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(t)dt,$$

113.] $f(z)$ аналитична в расшир. компл. плоскости за исключением конечного числа особых точек. Тогда сумма вычетов $f(z)$ во всех конечных особых точках $z_1, \dots, z_n$ и вычета в бесконечности равна нулю.

$$\mathrm{res}_\infty f(z) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{z_k} f = 0.$$

114 $f(z)$ наз-ся мероморфной, если она определена на всей компл. плоскости и не имеет в конечной части плоскости особых точек, отличных от полюсов. Если бы число особых точек в огран. области было бесконечным, то в области существовала бы предельная точка данного мн-ва, к-я уже не была бы изолированной.
Пример: дробнорациональная, $tg\,z$, $\sec z$;

115. 1) $\mathrm{res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

2) $\mathrm{res}_{z_0} f = \varphi(z_0)/\psi'(z_0)$;

116 Теорема о сумме вычетов: $\exists f(z)$ аналитична на полной компл. пл-ти за искл. конечного числа изолир. особых точек z_k $(k=\overline{1,N})$ вкл. и $z=\infty$, тогда

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}\left[f(z), z_k\right] = 0$$

117. Кольцо сходимости ряда $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$ кольцо $V = \{r < |z-z_0| < R\}$ с возможным добавлением некоторых или всех точек на его границы.
При этом возможны случаи $r=0$, $R=\infty$.
Если $r>0$ и $R<\infty$ то на внутренней и на внешней границах кольца V лежат особые точки $f(z)$

$$r = \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|C_m|}\,; \quad R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}}\,;$$

118 Пусть $f(x)$ задана на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z \geq 0$, причем ее аналит. продолжение $f(z)$ удовл. условиям леммы и не имеет особых точек на действительной оси. тогда несобств. интеграл 1 рода $\exists$ и равен:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}\left[f(z), z_k\right];$$

z_k – особые точки $f(z)$ в верхней полуплоскости.

<u>Лемма</u>: $\exists f(z)$ аналитична в верхней п/п $\operatorname{Im} z > 0$ всюду, за исключением конечного числа ~~исключением~~ конечного числа изолир. особых точек, и существуют такие положит. числа R_0, M, δ, что для всех точек верхней полупл-ти, удовл. условию $|z| > R_0$ имеет место оценка: $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^{1+\delta}}$, $|z| > R_0$ Тогда:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R'} f(t)\,dt = 0,$$ где контур интегрирования C_R' представляет собой полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ в верхней п/пл-ти

119 Лемма Жордана для верхней полуплоскости.
$\exists$ $f(z)$ аналитична в верхней п/п $\operatorname{Im} z > 0$ за исключением конечного числа изолированных особых точек, и равномерно относительно $0 \le \arg z \le \pi$ стремится к нулю при $|z| \to \infty$. Тогда при $a > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R'} e^{iat} f(t)dt = 0$$ где C_R' - дуга полуокружности $|z| = R$ в верхней п/п z.

120. Лемма Жордана для нижней полуплоскости.
$\exists$ $f(z)$ аналитична в нижней п/п $\operatorname{Im} z < 0$ за исключением конечного числа изолир. особых точек, и равномерно относительно $-\pi \le \arg z \le 0$ стремится к нулю при $|z| \to \infty$. Тогда при $a < 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R'} e^{iat} f(t)dt = 0$$ где C_R' - дуга полуокружности $|z| = R$ в нижней п/п z

121) $\exists$ $f(z)$ аналитична в правой п/п $\operatorname{Re} z \geq 0$ за исключением конечного числа изолир. особых точек и равномерно относительно $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \pi/2$ стремится к нулю при $|z| \to \infty$
Тогда при $a = i\alpha$, $\alpha > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R'} e^{-at} f(t)dt = 0$$ где C_R' - дуга полуокружности $|z| = R$ в правой п/п $\operatorname{Re} z \geq 0$

122). $\exists$ $f(z)$ аналитична в левой п/п $\operatorname{Re} z \le 0$ за исключением конечного числа изолир. особых точек и равномерно относительно $\frac{\pi}{2} \le \arg z \le -\frac{\pi}{2}$ стремится к нулю при $|z| \to \infty$. Тогда при $a = -i\alpha$, $(\alpha > 0)$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R'} e^{-at} f(t)dt = 0$$ где C_R' - дуга полуокр-ти $|z| = R$ в левой п/п $\operatorname{Re} z \geq 0$

123. $\exists$ $f(x)$, заданная на всей действ. оси $-\infty < x < +\infty$ может быть аналитически продолжена на верхнюю п/п $\operatorname{Im} z \geq 0$, а ее аналит. продолжение $f(z)$ удов. лемме Жордана (п. 119) в верхней п/п и не имеет особых точек на действител. оси. Тогда $\exists \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}\left[e^{iaz} f(z), z_k\right]$;

124] в обл. G задана однозначная ф-я $f(z)$, аналитичная всюду в G, за исключением конечного числа изолир. особых точек z_k $(k=\overline{1,p})$, причем z_k – полюса. Положим, что на границе Γ обл. G нет ни нулей, ни особых точек $f(z)$, и рассм. ф-ю: $\varphi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ – логарифм. производная $f(z)$

Вычеты функции $\varphi(z)$ в ее особых точках z_m $(m=\overline{1,N})$ – логарифм. вычеты $f(z)$; В силу общих св-в аналит-х ф-ий ясно, что особыми точками $\varphi(z)$ будут нули $\tilde{z}_k$ $(k=\overline{1,n})$ и полюсы z_k $(k=\overline{1,p})$ ф-ии $f(z)$.

125. В нуле порядка m ф-ии $f(z)$ ее лог. вычет равен m, т.е. порядку нуля:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, \tilde{z}_k\right] = m$$

В полюсе порядка n ф-ии $f(z)$ ее лог. вычет равен порядку полюса, взятому со знаком минус.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_k\right] = -n;$$

126 Теорема о логарифм. вычете:] $f(z)$ аналитична всюду в замкн. обл. $\overline{G}$, за исключением конечного числа лежащих внутри G изолир. особых точек z_k, к-е все являются полюсами, и пусть $f(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке границы Γ обл. G. Тогда разность между полным числом нулей и полным числом полюсов $f(z)$: (с учетом кратности)

$$N-P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt;$$

127. Принцип аргумента.] L – замкнутый контур, лежащий в области аналитичности $f(x)$.] $f(x)$ аналитична во всех точках внутри L, за исключением конечного числа полюсов, и не имеет на L нулей и полюсов. Тогда приращение аргумента числа $\omega = f(z)$ при обходе точкой z контура L равно: $\Delta_L \arg f(z) = 2\pi(N-P)$.

N и P – число нулей и полюсов $f(z)$ внутри L с учетом кратности. Другими словами, число оборотов вектора $f(z)$, сделанных им при обходе точкой z контура L равно $N-P$.

128. Теорема Руше. Пусть $f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитичны в замкн. обл. $\bar{G}$, причем на границе Γ обл. G имеет место нер-во: $|f(z)|_\Gamma > |\varphi(z)|_\Gamma$. Тогда полное число нулей в G ф-ии $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ равно полному числу нулей ф-ии $f(z)$

129. Основная теорема высшей алгебры: многочлен n-й степени $P_n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ при $n \geq 1$ с комплексными (или вещественными) коэф-ми имеет ровно n комплексных корней, считаемых со своими кратностями.

130. Отображение наз-ся конформным в т. z_0 если:
1) при этом отображении сохраняются углы между любыми двумя кривыми, проходящими через т. z_0
2) растяжение в т. z_0 не зависит от направления.
Если конф. отобр. сохраняет и направление отсчета углов, то оно I рода, если меняет на противоположное, то II рода.
Взаимнооднозначное отображение обл. D компл. пл-ти z на обл. G компл. пл-ти ω наз-ся конформным, если отображение во всех точках $z \in D$ обладает св-ми сохранения углов и постоянства растяжений.

131. Необх. и достат. условие конформности отоб-я.
(Н) $\exists f(z)$ осущ. конф. отоб. обл. G к. пл. z на обл. D к. пл. ω и ограничена в G тогда $f(z)$ однолистна и аналитична в G, причем $f'(z) \neq 0$ при $z \in G$
(Д) $\exists f(z)$ однозначная и однолистная аналит. ф-я в G и $f'(z) \neq 0$ при $z \in G$. Тогда $f(x)$ производит конформное отображение обл. G на обл. D компл. пл-ти ω, представляющую собой обл. значений ф-ии $\omega = f(z)$ при $z \in G$
~~(132) Принцип соотв-я границ~~

132. Принцип соотв. границ:

Прямо: ∃ в конечной обл. G, ограниченной контуром γ задана однознач. аналит. ф-я $f(z)$, непрерывная в $\bar{G}$ и осуществ-е взаимно-однозначное отображение контура γ на некот. контур Γ к. пл. ω. Тогда, если при данном отображен. контуров сохраняется направление обхода, то $f(z)$ осущ-т конформн. отобр-е обл. G на внутреннюю область D, ограниченную контуром Γ.

Обратно: Если $f(z)$ осущ-т конформное отображение обл. G компл. пл-ти z на огранич. обл. D пл-ти ω, то ф-я $f(z)$ непрерывна на границе обл. G и осущ-т непрерывное и взаимно-однозначное соотв-е границ γ и Γ областей G и D.

133) Теорема Римана: Всякую односвязную область G компл. пл-ти z, граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отображать на внутренность единичного круга $|\omega|<1$ пл-ти ω.

134) Ф-я Жуковского $\omega = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ однолистна в любой области G, которая не содержит крит. точек $z=\pm 1$, не содержит ни одной пары точек $z_1 \neq z_2$, такой, что $z_1 \cdot z_2 = 1$

Ф-я производит отображение семейства концентрических окружностей $|z| = r_0$ пл-ти z на семейство софокусных эллипсов пл-ти ω. Если $r_1 < 1$, то положит. направлению обхода окр-ти $|z| = r_1$ соотв-т отрицат. направление обхода эллипса. Если $r_2 = \frac{1}{r_1} > 1$, то положит. направлению обхода окружности $|z| = r_2$ соотв-т положит. напр-е обхода эллипса. При $r_1 \to 1$ эллипс вырождается в отрезок $[-1; 1]$ действ. оси, проходимый дважды. При $r_1 \to 0$ эллипс переходит в окр-ть бесконечно большого радиуса.

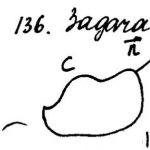
Обратная для ф. Жуковского:

$\omega = z + \sqrt{z^2-1}$ – двузначная аналит. ф-я всюду, за искл. 2х точек ветвления $z = \pm 1$

135) При отображении обл. G плоскости z на область D плоскости ω, осуществляемом ф-ей $f(z) = \xi(x,y) + i\eta(x,y)$, ур-е Лапласа для ф-ии $u(x,y)$ перейдет в ур. Лапласа для ф-ии $\mathcal{U}(\xi,\eta) = u[x(\xi,\eta); y(\xi,\eta)]$ лишь в том случае, если данное отображение – конформное.

То есть в G задана гарм. ф-я $u(x,y)$, т.е. $\forall x,y \in G$ $\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$. С помощью невыр. преобр-я $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$: $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$ задаем $f = \xi(x,y) + i\eta(x,y)$;

136. Задача Робэна — распределение заряда на проводящей границе. $\exists\ n$ - внешняя нормаль.



$$q = \int_C \delta(S)\,dS \text{ - дано; } \delta(S) = \frac{1}{4\pi} E_n\Big|_C = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_C$$

В задачах электростатики: $\mathrm{rot}\,\vec{E}=0$; $\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho$; $\vec{E} = -\nabla u \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta u = -4\pi\rho$.

Задача Робэна: $\Delta u = 0$ вне C; $u|_C = \mathrm{const}$

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} dS = -4\pi q \text{ - дано; } \delta(S) \text{ - найти.}$$

137. Функция ограниченной степени роста. При $t\to\infty$ $f(t)$ имеет ограниченную степень роста, т.е. для каждой функции рассматриваемого класса $\exists\ M>0$, $a>0$ что для всех $t>0$

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad (1)$$

Точная нижняя грань тех значений a, для к-х имеет место (1) наз-ся показателем степени роста функции $f(x)$;

138 Одностороннее преобразование Лапласа ф-ии $f(t)$ класса $A(a)$ наз-ся ф-я компл. пер. $F(p)$, определяемая соотношением

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$$

если $\exists\ F(p)$, то $f(t) \doteq F(p)$ $\quad f(t)$-оригинал $F(p)$-изображение.

139. Интеграл $F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$ сходится в области $\mathrm{Re}\,p>a$ где a- показатель степени роста $f(t)$, причем $\forall\ x_0>a$ интеграл при $\mathrm{Re}\,p \geq x_0 > a$ сходится равномерно

140. Изображение Лапласа $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$ ф-ии $f(t)$ является аналитической ф-ей компл. переменной p в области $\mathrm{Re}\,p>a$, где a - показатель степени роста $f(t)$

141. Теорема запаздывания.

$\exists\, F(p) \doteq f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$ и задана функция:

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t<\tau, \quad \tau>0 \\ f(t-\tau), & t \geq \tau \end{cases}$$

Тогда $f_\tau(t) \doteq F_\tau(p) = e^{-p\tau}F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$.

142. 1) Изображение производной: Если $f'(t)$ удовл. условиям существования изображения при $\operatorname{Re} p > a$ и $f(t) \doteq F(p)$, то: $f'(t) = pF(p) - f(0)$, $\operatorname{Re} p > a$.

2) Производная изображения: Если $f^{(n)}(t)$ удовл. условиям существования изображения при $\operatorname{Re} p > a$ и $f(t) \doteq F(p)$, то

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n \left\{ F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right\}, \quad \operatorname{Re} p > a.$$

143. Изображение интеграла.

$\exists\, f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$. Тогда $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau \doteq \frac{1}{p}F(p)$, $\operatorname{Re} p > a$.

144. Изображение свертки. Сверткой ф-й $f_1(t)$ и $f_2(t)$ наз-ся $\varphi(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int\limits_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)dt$.

Если $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > a_1$; $f_2(t) \doteq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > a_2$, то

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \doteq F_1(p)F_2(p), \quad \operatorname{Re} p > \max\{a_1, a_2\};$$

145. Интеграл Дюамеля: $y(t) = \frac{1}{a_0}\int\limits_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau$;

146. Теорема Меллина. $\exists$ известно, что заданная ф-я $F(p)$ в области $\operatorname{Re} p > a$ является изображением кусочно гладкой $f(t)$ действительной переменной t, обладающей степенью роста a. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp; \quad x>a$$

147. Изображение произведения: $\exists\, f_1(t) \doteq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > a_1$, $f_2(t) \doteq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > a_2$; тогда

$$f(t) = f_1(t)f_2(t) \doteq F(p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q)(p-q)dq = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(p-q)F_2(q)dq$$

причем $F(p)$ определена и аналитична в обл. $\operatorname{Re} p > a_1+a_2$, а интегр-е произв-ся по $\forall$ прямой, $\parallel$-ой мнимой оси, удовл. в 1м случае: $a_1 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p - a_2$; во 2-м случае: $a_2 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} p - a_1$;