

Экзаменационные вопросы по ТФКП.

Вопрос 1. Элементарные операции с комплексными числами. Элементарные функции комплексной переменной.

- 1 Операция сложения комплексных чисел. Ее геометрическая интерпретация. Неравенства треугольника.
- 2 Операция умножения комплексных чисел. Ее геометрическая интерпретация. Как связаны модуль и аргумент произведения с модулями и аргументами сомножителей?
- 3 Операция деления комплексных чисел. Как связаны модуль и аргумент частного с модулями и аргументами делимого и делителя?
- 4 Операция комплексного сопряжения и ее свойства. Ее геометрическая интерпретация. Как связаны модули и аргументы комплексно сопряженных чисел?
- 5 Операция комплексного сопряжения и ее свойства. Ее геометрическая интерпретация. Как связаны вещественные и мнимые части комплексно сопряженных чисел?
- 6 Операция возведения комплексного числа в целую степень. Как меняются модуль и аргумент при возведении в целую степень? Формула Муавра.
- 7 Формы записи комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа и их геометрический смысл. Формула Эйлера.
- 8 Операция извлечения корня n -той степени из комплексного числа. Как меняются модуль и аргумент при извлечении корня n -той степени? Как располагаются значения корня n -той степени на комплексной плоскости?
- 9 Формы записи комплексного числа. Вещественная и мнимая части комплексного числа. Выражения модуля и аргумента комплексного числа через вещественную и мнимую части.
- 10 Операция комплексного сопряжения и ее свойства. Ее геометрическая интерпретация. Выражение вещественной и мнимой частей комплексного числа через пару комплексно сопряженных чисел?
- 11 Запишите функцию $f(z) = z^2$, где $z = x + iy$ в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.

- 12** Запишите функцию $f(z) = \frac{1}{z}$, где $z = x + iy$ в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 13** Запишите выражение для функции Жуковского. Однозначна ли эта функция?
Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 14** Запишите функцию $f(z) = e^z$, где $z = x + iy$ в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции. Чему равен период функции e^z ?
- 15** Запишите функцию $f(z) = \sin(z)$, где $z = x + iy$ в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 16** Запишите функцию $f(z) = \cos(z)$, где $z = x + iy$ в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 17** Запишите функцию $f(z) = \sqrt{z}$, где $z = \rho e^{i\varphi}$ в виде $f(z) = Re^{i\Phi}$. Однозначна ли эта функция? Если нет, то как выделить однозначные ветви?
- 18** Запишите функцию $f(z) = Ln(z)$, где $z = x + iy$ в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
Однозначна ли эта функция? Если нет, то как выделить однозначные ветви?
- 19** Запишите функцию $f(z) = \ln(z)$, где $z = x + iy$ в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 20** Запишите функцию $f(z) = Ln(z)$, где $z = \rho e^{i\varphi}$ в виде $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$.
Однозначна ли эта функция? Если нет, то как выделить однозначные ветви?
- 21** Запишите функцию $f(z) = \ln(z)$, где $z = \rho e^{i\varphi}$ в виде $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$.
Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 22** Как определяется функция $f(z) = z^a$ при различных a ?

Вопрос 2. Понятие аналитической функции.

- 23** Что такое бесконечно удаленная точка комплексной плоскости?

Арифметические действия с бесконечно удаленной точкой.

- 24 Определение однозначной функции. Определение однолистной функции. Примеры
- 25 Связь между свойствами однозначности и однолистности прямой и обратной функции. Примеры
- 26 Отличие производной функции комплексной переменной от производной функции действительной переменной.
- 27 Определение аналитической функции. Пример. Приведите пример функции, не являющейся аналитической.
- 28 Определение аналитической функции. Пример. Приведите пример функции, не являющейся аналитической.
- 29 Запишите условия Коши-Римана для вещественной и мнимой части аналитической функции.
- 30 Запишите условия Коши-Римана для вещественной и мнимой части аналитической функции в полярных координатах.
- 31 Запишите условия Коши-Римана для модуля и аргумента аналитической функции.
- 32 Сформулируйте необходимые и достаточные условия аналитической функции.
- 33 Запишите производную аналитической функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в различных формах.
- 34 Кратко сформулируйте основные свойства аналитических функций.
- 35 Определение функции, аналитической в замкнутой области.
- 36 Как связаны аналитичность функции и гармоничность ее вещественной и мнимой частей?
- 37 Геометрический смысл модуля производной аналитической функции.

- 38 Геометрический смысл аргумента производной аналитической функции.
- 39 Сформулируйте теорему о нулях аналитической функции.
- 40 Сформулируйте следствия теоремы о нулях аналитической функции.
- 41 Сформулируйте теорему единственности определенной аналитической функции.
- 42 Опишите возможные множества задания аналитической функции.
- 43 Что такое нуль аналитической функции? Что такое нуль n -того порядка аналитической функции? Опишите поведение аналитической функции в окрестности нуля n -того порядка.
- 44 Определение правильной точки. Определение особой точки. Примеры
- 45 Запишите интегральную формулу для n -той производной аналитической функции.
- Вопрос 3. Интеграл по кривой на комплексной плоскости. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.
- 46 Определение интеграла от функции комплексной переменной по кривой на комплексной плоскости.
- 47 Кратко сформулируйте основные свойства $\int_C f(z) dz$.
- 48 Запишите формулу вычисления $\int_C f(z) dz$ при помощи интегрирования по параметру.
- 49 Чему равен $\int_{|z-z_0|=R_0} \frac{dz}{z-z_0}$?
- 50 Запишите формулу замены переменной в $\int_C f(z) dz$.
- 51 Сформулируйте теорему Коши для односвязной области.

- 52 Сформулируйте теорему Коши для интеграла по границе односвязной области от аналитической функции.
- 53 Сформулируйте теорему Коши для многосвязной области.
- 54 Что такое неопределенный интеграл от $f(z)$?
- 55 Сформулируйте условия аналитичности неопределенного интеграла от $f(z)$?
- 56 Что такое первообразная функции $f(z)$? Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
- 57 Запишите формулу Коши-Адамара. Сформулируйте условия ее применимости.
- 58 Запишите интегральную формулу Коши. Сформулируйте условия ее применимости.
- 59 Запишите формулу среднего значения.
- 60 Сформулируйте принцип максимума модуля аналитической функции.
- 61 Сформулируйте принцип минимума модуля аналитической функции.
- 62 Что такое интеграл типа Коши?
- 63 Сформулируйте теорему о возможности дифференцирования интеграла типа Коши под знаком интеграла.
- 64 Сформулируйте свойства интеграла типа Коши.
- 65 Сформулируйте теорему о производных высших порядков аналитической функции. Запишите интегральную формулу для n -той производной аналитической функции.
- 66 Сформулируйте теорему Морера.
- 67 Сформулируйте теорему Лиувилля.
- 68 Определение целой функции. Пример. Сформулируйте основное свойство целой

функции.

69 Что такое криволинейный интеграл, зависящий от параметра?

70 Сформулируйте теорему о дифференцировании криволинейного интеграла по параметру.

Вопрос 4. Числовые и функциональные ряды.

71 Что такое числовой ряд? Что такое частичная сумма ряда? Что такое сумма ряда? Что такое остаток ряда?

72 Определение сходящегося числового ряда. Определение расходящегося числового ряда. Примеры

73 Сформулируйте критерий Коши для числового ряда.

74 Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда.

75 Сформулируйте признак Даламбера. Сформулируйте признак Даламбера в предельной форме.

76 Сформулируйте признак Коши. Сформулируйте признак Коши в предельной форме.

77 Что такое функциональный ряд? Что такое частичная сумма ряда? Что такое сумма ряда? Что такое остаток ряда?

78 Сформулируйте критерий Коши сходимости функционального ряда.

79 Определение равномерно сходящегося функционального ряда. Примеры

80 Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.

81 Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

82 Сформулируйте условия непрерывности суммы функционального ряда.

- 83 Сформулируйте условия, при которых возможно почленное интегрирование функционального ряда.
- 84 Сформулируйте теорему Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
- 85 Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
- 86 Сформулируйте теорему Абеля для степенного ряда.
- 87 Что такое круг сходимости степенного ряда? Что такое радиус сходимости степенного ряда?
- 88 Запишите формулу Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
- 89 Укажите область равномерной сходимости степенного ряда.
- 90 Укажите область, где возможно почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Меняется ли при этом радиус сходимости?
- 91 Пусть степенной ряд с центром в точке z_0 сходится к функции $f(z)$. Запишите выражения коэффициентов ряда через значения функции и ее производных в точке z_0 .
- 92 Чему равна сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n$?
- 93 Сформулируйте теорему Тейлора.
- 94 Запишите интегральную формулу для коэффициентов ряда Тейлора.
- 95 Чем определяется радиус круга сходимости ряда Тейлора для аналитической функции?
- 96 Запишите ряды для e^z , $\sin z$, $\cos z$.
- 97 Сформулируйте теорему о наличии особой точки на границе круга сходимости.

Вопрос 5. Ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек. Вычеты.

- 98** Что такое ряд Лорана? Что представляет собой область его сходимости?
Примеры
- 99** Сформулируйте теорему о разложимости функции в ряд Лорана.
- 100** Что такое неизолированная особая точка. Примеры. В окрестности каких особых точек нельзя раскладывать функцию в ряд Лорана?
- 101** Определение изолированной особой точки. Примеры.
- 102** Определение устранимой особой точки. Определение устранимой бесконечно удаленной особой точки. Примеры
- 103** Сформулируйте теорему об устранимой особой точке. Как можно представить функцию в окрестности устранимой особой точки? Что можно сказать о пределе функции в устранимой особой точке?
- 104** Определение полюса. Определение полюса в бесконечно удаленной точке.
Примеры
- 105** Сформулируйте теорему о полюсе. Как можно представить функцию в окрестности полюса? Что можно сказать о пределе функции в полюсе?
- 106** Определение существенно особой точки. Определение существенно особой бесконечно удаленной точки. Примеры.
- 107** Сформулируйте теорему Сохоцкого-Вейерштрасса. Что можно сказать о пределе функции существенно особой точке?
- 108** Определение вычета функции в изолированной особой точке. Определение вычета функции в бесконечно удаленной изолированной особой точке. В каких точках нельзя считать вычеты?
- 109** Сформулируйте основную теорему теории вычетов.
- 110** Чему равен вычет в устранимой особой точке? Что можно сказать о вычете в бесконечно удаленной устранимой особой точке? Примеры
- 111** Чему равен вычет в полюсе первого порядка? Запишите формулу вычисления

вычета в полюсе n -го порядка. Примеры

- 112 Как считать вычет в существенно особой точке?
- 113 Как связан вычет в бесконечно удаленной изолированной особой точке с вычетами в других изолированных особых точках?
- 114 Определение мероморфной функции. Примеры
- 115 Напишите две формулы для вычисления вычета в полюсе первого порядка.
- 116 Сформулируйте теорему о сумме вычетов.
- 117 Что такое кольцо сходимости ряда Лорана? Как определяются меньший и больший радиусы кольца сходимости?

Вопрос 6. Применение вычетов. Конформные отображения. Операционное исчисление.

- 118 Сформулируйте теорему о вычислении несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ при помощи теории вычетов.
- 119 Сформулируйте лемму Жордана для верхней полуплоскости.
- 120 Сформулируйте лемму Жордана для нижней полуплоскости.
- 121 Сформулируйте лемму Жордана для левой полуплоскости.
- 122 Сформулируйте лемму Жордана для правой полуплоскости.
- 123 Сформулируйте теорему о вычислении несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)dx$ при помощи теории вычетов.
- 124 Определение логарифмической производной. Особые точки логарифмической производной. Определение логарифмического вычета.
- 125 Чему равен логарифмический вычет в нуле m -того порядка. Чему равен логарифмический вычет в полюсе n -того порядка.

- 126 Сформулируйте теорему о логарифмическом вычете.
- 127 Сформулируйте принцип аргумента.
- 128 Сформулируйте теорему Руше.
- 129 Сформулируйте основную теорему высшей алгебры.
- 130 Определение конформного отображения в точке. Определение конформного отображения области на область.
- 131 Сформулируйте необходимое и достаточное условие конформности отображения.
- 132 Сформулируйте принцип соответствия границ.
- 133 Сформулируйте теорему Римана.
- 134 На что отображается комплексная плоскость функцией Жуковского? Запишите обратную функцию Жуковского.
- 135 Как преобразуется оператор Лапласа при конформном отображении?
- 136 Сформулируйте задачу Робэна.
- 137 Что такое функция ограниченной степени роста?
- 138 Что такое одностороннее преобразование Лапласа?
- 139 Для каких p существует изображение $F(p)$? Сформулируйте соответствующую теорему.
- 140 Каковы аналитические свойства изображения $F(p)$? Сформулируйте соответствующую теорему.
- 141 Сформулируйте теорему запаздывания.

142 Чему равно изображение производной? Чему равна производная изображения?

143 Чему равно изображение интеграла?

144 Чему равно изображение свертки?

145 Запишите интеграл Дюгамеля.

146 Сформулируйте теорему Меллина.

147 Чему равно изображение произведения?

Вопросы на 4 и 5 по ТФКП.

- 1 Сформулируйте и докажите теорему о необходимых и достаточных условиях аналитичности функции.
- 2 Сформулируйте и докажите теорему Коши для односвязной области.
- 3 Сформулируйте и докажите теорему Коши для интеграла по границе односвязной области от аналитической функции.
- 4 Сформулируйте и докажите теорему Коши для многосвязной области.
- 5 Выведите интегральную формулу Коши. Запишите ее для различных случаев расположения точки относительно контура.
- 6 Сформулируйте и докажите теорему Морера.
- 7 Сформулируйте и докажите теорему Лиувилля.
- 8 Сформулируйте и докажите II теорему Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
- 9 Сформулируйте и докажите теорему Абеля для степенного ряда.
- 10 Сформулируйте и докажите теорему единственности определенной аналитической функции.
- 11 Сформулируйте и докажите теорему об устранимой особой точке.
- 12 Сформулируйте и докажите теорему о полюсе.
- 13 Сформулируйте и докажите теорему Сохоцкого-Вейерштрасса о поведении функции в окрестности существенно особой точки.
- 14 Сформулируйте и докажите основную теорему теории вычетов.
- 15 Сформулируйте и докажите основную теорему высшей алгебры.
- 16 Сформулируйте и докажите теорему о возможности дифференцирования интеграла типа Коши под знаком интеграла.

- 17 Сформулируйте и докажите теорему о производных высших порядков аналитической функции.
- 18 Запишите и докажите формулу Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
- 19 Сформулируйте и докажите теорему Тейлора.
- 20 Сформулируйте и докажите теорему о разложимости функции в ряд Лорана.
- 21 Сформулируйте и докажите теорему о сумме вычетов, включая вычет в бесконечно удаленной точке.
- 22 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ при помощи теории вычетов и лемму, которая используется при ее доказательстве.
- 23 Сформулируйте и докажите лемму Жордана для верхней полуплоскости.
- 24 Сформулируйте и докажите лемму Жордана для нижней полуплоскости.
- 25 Сформулируйте и докажите лемму Жордана для левой полуплоскости.
- 26 Сформулируйте и докажите лемму Жордана для правой полуплоскости.
- 27 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)dx$ при помощи теории вычетов и лемму, которая используется при ее доказательстве.
- 28 Сформулируйте и докажите теорему о логарифмическом вычете.
- 29 Сформулируйте и докажите теорему об интегральной формуле для производной аналитической функции.
- 30 Запишите и докажите формулу Коши-Адамара для радиуса круга сходимости степенного ряда.

- 31 Сформулируйте и докажите теорему о дифференцировании и интегрировании степенного ряда внутри круга сходимости.
- 32 Сформулируйте и докажите принцип соответствия границ и его следствие.
- 33 Сформулируйте и докажите теорему о существовании изображения.
- 34 Сформулируйте и докажите теорему об аналитичности изображения.
- 35 Сформулируйте и докажите теорему об аналитичности интеграла типа Коши.
- 36 Найдите сумму и произведение всех корней уравнения $z^n + 1 = 0$
- 37 Найдите сумму и произведение всех корней уравнения $z^n - 1 = 0$
- 38 Выведите формулы вычисления вычета в полюсе первого и n -того порядков.
- 39 Сформулируйте условия, при которых возможно вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$, ($R(x)$ -рациональная функция) при помощи теории вычетов и выведите формулу его вычисления.
- 40 Сформулируйте условия, при которых возможно вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos ax dx$, ($R(x)$ -рациональная функция) при помощи теории вычетов и выведите формулу его вычисления.
- 41 Сформулируйте условия, при которых возможно вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax} dx$, ($R(x)$ -рациональная функция) при помощи теории вычетов и выведите формулу его вычисления.
- 42 Выведите формулу для логарифмического вычета в нуле n -того порядка. Выведите формулу для логарифмического вычета в полюсе p -того порядка.
- 43 Выведите интегральную формулу Коши.
- 44 Выведите интегральную формулу Коши-Адамара.

- 45 Выведите формулу преобразования оператора Лапласа при конформном отображении.
- 46 Выведите формулу изображения n -той производной.
- 47 Выведите формулу производной изображения.
- 48 Выведите формулу изображения интеграла.
- 49 Выведите формулу изображения степенной функции.
- 50 Выведите формулу изображения свертки.
- 51 Выведите формулу среднего значения аналитической функции.
- 52 Докажите круговое свойство дробно-линейной функции.
- 53 Сформулируйте и докажите теорему запаздывания.
- 54 Сформулируйте условия, при которых возможно вычисление интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin ax dx$, ($R(x)$ -рациональная функция) при помощи теории вычетов и выведите формулу его вычисления.
- 55 Сформулируйте и докажите принцип максимума модуля аналитической функции.
- 56 Сформулируйте и докажите принцип минимума модуля аналитической функции.
- 57 Сформулируйте и докажите I теорему Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
- 58 Сформулируйте и докажите теорему о нулях аналитической функции.
- 59 Сформулируйте и докажите теорему о наличии особой точки на границе круга сходимости степенного ряда для аналитической функции.

- 60** Сформулируйте и докажите теорему Руше.
- 61** Сформулируйте и докажите теорему об аналитическом продолжении через общий участок границы двух областей.
- 62** Сформулируйте и докажите теоремы об аналитическом продолжении соотношений с вещественной осью.
- 63** Сформулируйте и докажите теорему о дифференцировании криволинейного интеграла от функции комплексной переменной, зависящего от параметра.
- 64** Сформулируйте и докажите теорему Меллина.
- 65** Сформулируйте постановку задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения n -того порядка с постоянными коэффициентами. Получите ее решение, записанное в виде интеграла Дюгамеля при помощи операционного исчисления.
- 66** Сформулируйте постановку задачи Робэна и получите ее решение.
- 67** Выведите условия Коши-Римана в полярных координатах.
- 68** Выведите условия Коши-Римана для модуля и аргумента аналитической функции.
- 69** Сформулируйте и докажите теорему об однозначности определения дробно-линейной функции путем задания взаимно-однозначного соответствия трех точек трем точкам.
- 70** Выведите формулу изображения произведения.
- 71** Сформулируйте и докажите прямую и обратную теоремы о конформном отображении, осуществляемом аналитической функцией.