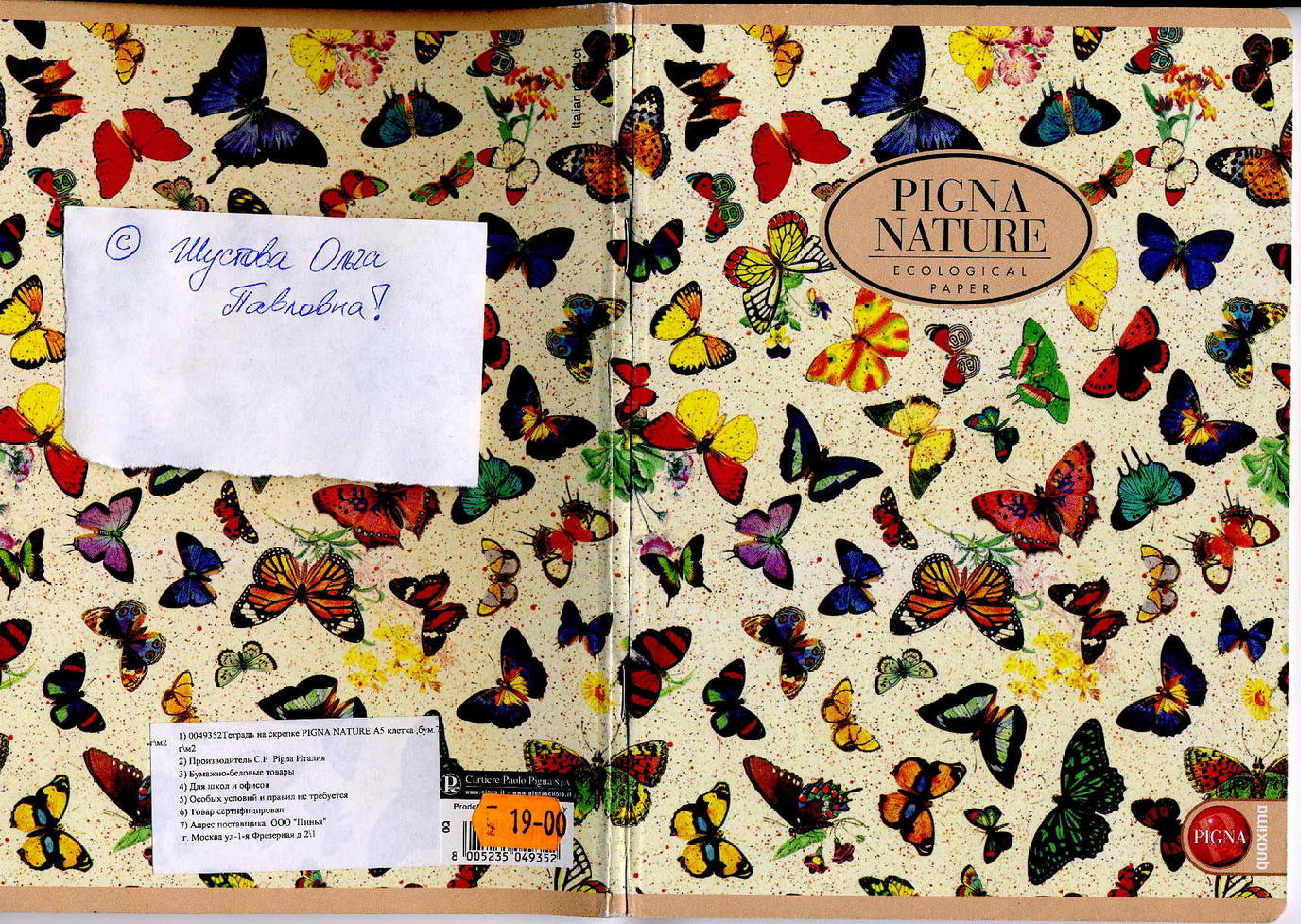

© Шустова Ольга Павловна!
PIGNA
NATURE
ECOLOGICAL
PAPER
Italian product
1) 0049352Тетрадь на скрепке PIGNA NATURE A5 клетка ,бум.7
г\м2
2) Производитель С.Р. Pigna Италия
3) Бумажно-беловые товары
4) Для школ и офисов
5) Особых условий и правил не требуется
6) Товар сертифицирован
7) Адрес поставщика: ООО "Пинья"
г. Москва ул-1-я Фрезерная д 2\1
Cartiere Paolo Pigna SpA
19-00
8 005235 049352
PIGNA
quaxima

Задание 1. Векторный анализ. δ-функция

1.1. φ, ψ – скал. ф.; $\vec{A}, \vec{B}, \vec{E}, \vec{H}$ – вект. ф. коорд.

а) $\operatorname{grad}(\varphi \cdot \psi) = \nabla(\varphi\psi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi = \varphi \operatorname{grad} \psi +$
$+ \psi \operatorname{grad} \varphi$.

б) $\operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{A}) = (\nabla(\varphi \vec{A})) = (\nabla \overset{\downarrow}{\varphi} \vec{A}) + (\nabla \varphi \overset{\downarrow}{\vec{A}}) =$
$= (\nabla \varphi \, \vec{A}) + (\varphi \nabla \vec{A}) = (\operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{A}) + \varphi \operatorname{div} \vec{A}$.

в) $\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = (\nabla [\overset{\downarrow}{\vec{E}} \vec{H}]) + (\nabla [\vec{E} \overset{\downarrow}{\vec{H}}]) = \nabla \overset{\downarrow}{\vec{E}} \vec{H} + \nabla \vec{E} \overset{\downarrow}{\vec{H}} =$
$= ([\nabla \vec{E}] \vec{H}) - ([\nabla \vec{H}] \vec{E}) = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}$.

г) $\operatorname{rot}(\varphi \vec{A}) = [\nabla (\varphi \overset{\downarrow}{\vec{A}})] + [\nabla (\overset{\downarrow}{\varphi} \vec{A})] = [\varphi \nabla \vec{A}] +$
$+ [\nabla \varphi \vec{A}] = \varphi \operatorname{rot} \vec{A} + [\operatorname{grad} \varphi \, \vec{A}] = \varphi \operatorname{rot} \vec{A} - [\vec{A} \operatorname{grad} \varphi]$

д) $\operatorname{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = [\nabla [\overset{\downarrow}{\vec{A}} \vec{B}]] + [\nabla [\vec{A} \overset{\downarrow}{\vec{B}}]] = \overset{\downarrow}{\vec{A}} (\nabla B) - \vec{B} (\nabla \overset{\downarrow}{\vec{A}}) +$
$+ \vec{A} (\nabla \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \vec{A}) = (\vec{B} \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \nabla) \vec{B} + \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A}$

е) $\operatorname{grad}(\vec{A}\vec{B}) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{A}} \vec{B}) + \nabla(\vec{A} \overset{\downarrow}{\vec{B}}) = \nabla(\vec{B} \overset{\downarrow}{\vec{A}}) + \nabla(\vec{A} \overset{\downarrow}{\vec{B}}) =$
$= [\vec{B} [\nabla \vec{A}]] + \vec{A} (\nabla \vec{B}) + [\vec{A} [\nabla \vec{B}]] + \vec{B} (\nabla \vec{A}) =$
$= [\vec{B} \operatorname{rot} \vec{A}] + [\vec{A} \operatorname{rot} B] + (A \nabla) \vec{B} + (B \nabla) \vec{A}$

ж) $\Delta(\varphi\psi) = \operatorname{div} \operatorname{grad}(\varphi\psi) = \operatorname{div}(\varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi) =$
$= \varphi \Delta \psi + \psi \Delta \varphi + 2 \nabla \varphi \cdot \nabla \psi$.

1.2 $\vec{E}, \vec{H}$ – пост. вект.; φ, f – зад. функц скал. арг.

а) $\operatorname{grad} \varphi(r) = \varphi'(r) \cdot \operatorname{grad} r = \varphi'(r) \cdot \frac{\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z}{r} = \frac{\vec{r}}{r} \varphi'(r)$.

б) $\operatorname{div}(\vec{r} \cdot \varphi(r)) = (\nabla (\overset{\downarrow}{\vec{r}} \varphi(r))) + (\nabla (\vec{r} \overset{\downarrow}{\varphi}(r))) =$
$= (\nabla \vec{r} \cdot \varphi(r)) + (\vec{r} \cdot \nabla \varphi(r)) = \varphi(r) \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \cdot \operatorname{grad} \varphi(r) =$
$= 3\varphi(r) + \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \varphi'(r) = 3\varphi(r) + r \cdot \varphi'(r)$.

г) $\mathrm{rot}(\vec r\cdot\varphi(r)) = [\nabla(\overset{\downarrow}{\vec r}\,\varphi(r))] + [\nabla(\vec r\,\overset{\downarrow}{\varphi}(r))] =$

$= [\nabla\vec r\cdot\varphi(r)] + [\nabla\varphi(r), \vec r] = \varphi(r)\,\underbrace{\cancel{\mathrm{rot}}\,\vec r}_{0} +$

$+ \left[\frac{\vec r}{r}\underbrace{\cancel{\varphi'(r)}, \vec r}_{0}\right] = 0.$

) $\mathrm{grad}(\vec E\vec r) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec E}\vec r) + \nabla(\vec E\overset{\downarrow}{\vec r}) = [\vec r\,\underbrace{\cancel{\mathrm{rot}\,\vec E}}_{0}] +$

$+ (\vec r\nabla)\vec E + [\vec E\,\underbrace{\cancel{\mathrm{rot}\,\vec r}}_{0}] + (\vec E\nabla)\overset{\downarrow}{\vec r} = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot$

const $\cdot(E_x\vec i + E_y\vec j + E_z\vec k) + \left(E_x\frac{\partial}{\partial x} + E_y\frac{\partial}{\partial y} + E_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot$

$\cdot(x\vec i + y\vec j + z\vec k) = \vec E.$

) $(\vec E\nabla)\vec r = \vec E.$

) $\mathrm{div}(\vec H\times\vec r) = (\nabla[\overset{\downarrow}{\vec H}\vec r]) + (\nabla[\vec H\overset{\downarrow}{\vec r}]) =$

$= \vec r\,\underbrace{\cancel{\mathrm{rot}\,\vec H}}_{0} - \vec H\,\underbrace{\cancel{\mathrm{rot}\,\vec r}}_{0} = 0.$

е) $\mathrm{rot}(\vec H\times\vec r) = [\nabla[\overset{\downarrow}{\vec H}\vec r]] + [\nabla[\vec H\overset{\downarrow}{\vec r}]] =$

$= \overset{\downarrow}{\vec H}\underbrace{\cancel{(\nabla\vec r)}}_{0} - \vec r\underbrace{\cancel{(\nabla\overset{\downarrow}{\vec H})}}_{0} + \vec H(\nabla\overset{\downarrow}{\vec r}) - (\vec H\nabla)\vec r = \vec H\,\mathrm{div}\,\vec r -$

$(\vec H\nabla)\vec r = 3\vec H - \vec H = 2\vec H.$

) $\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\cdot f\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) = \frac{1}{r}\,\mathrm{grad}\,f\left(t-\frac{r}{c}\right) + f\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot$

$\cdot\,\mathrm{grad}\,\frac{1}{r} = \frac{1}{r}\cdot f'\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)\mathrm{grad}\,r - f\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot$

$\cdot\,\frac{\vec r}{r^3} = -\frac{\vec r}{r^2 c}f'\left(t-\frac{r}{c}\right) - \frac{\vec r}{r^3}f\left(t-\frac{r}{c}\right).$

Коэффициенты Ламе: $h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$ (1.3)

пск → цск : $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$

$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1.$

$h_\varphi = \sqrt{r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi} = r,\quad h_z = 1.$

пск → сск : $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,$
$z = r\cos\theta.$

$h_r = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1,$

$h_\varphi = \sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi} = r\sin\theta,$

$h_\theta = \sqrt{r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta} = r.$

цск

$\mathrm{grad}\,\psi = \vec e_r\frac{1}{h_r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \vec e_\varphi\frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \vec e_z\frac{1}{h_z}\frac{\partial\psi}{\partial z} =$

$= \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\vec e_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\vec e_z.$

$\mathrm{div}\,\vec B = \frac{1}{h_r h_\varphi h_z}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(h_\varphi h_z B_r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(h_r h_z B_\varphi) +\right.$

$\left.+ \frac{\partial}{\partial z}(h_r h_\varphi B_z)\right\} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(B_\varphi) +\right.$

$\left.+ \frac{\partial}{\partial z}(rB_z)\right\} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}.$

$$\mathrm{rot}\,\vec A = \frac{1}{h_r h_\varphi h_z}\cdot\begin{vmatrix} h_r\vec e_r & h_\varphi\vec e_\varphi & h_z\vec e_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_r A_r & h_\varphi A_\varphi & h_z A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r}\left\{\vec{e}_r\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - r\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) r + \vec{e}_z\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\right\} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z.$$

ССК

$$\operatorname{grad}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\vec{e}_\theta.$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\, B_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(rB_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta\, B_\theta)\right\} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 B_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} +$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\cdot B_\theta).$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta\cdot A_\varphi)\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\right) r\sin\theta\cdot\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\sin\theta\cdot A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\cdot r\vec{e}_\theta\right\} = \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\sin\theta\cdot A_\varphi)}{\partial \theta}\right)\vec{e}_r +$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\theta.$$

4.

$$\Delta\Psi = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\operatorname{grad}\Psi = 0.$$

Из 1.3. используем ф-лы для $\operatorname{grad}\Psi$ и $\operatorname{div}\vec{B}$:

ПОСК

$$\Delta\Psi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial \Psi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial \Psi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial \Psi}{\partial q_3}\right)\right\}.$$

ПСК

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}.$$

ЦСК

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}.$$

ССК

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right).$$

1.5

Считая известными нули $\Phi(x)$, вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\delta(\Phi(x))\,dx$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cdot\delta(\Phi(x))\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cdot\sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left|\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_{x=x_i}\right|}\,dx =$$

$$= \sum_i \frac{1}{\left|\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=x_i}\right|} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\delta(x-x_i)\,dx = \sum_i \frac{F(x_i)}{\left|\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=x_i}\right|}$$

1.6. $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \delta(4x^2-1)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, \frac{\delta(2x-1)+\delta(2x+1)}{2\cdot|1|}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\delta(2x-1)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\delta(2x+1)\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int_{-\infty}^{+\infty}(2x)^2\delta(2x-1)\,d(2x) + \frac{1}{16}\int_{-\infty}^{+\infty}(2x)^2\cdot$$

$$\cdot\,\delta(2x+1)\,d(2x) = \frac{1}{16}\cdot(2\cdot 1)^2 + \frac{1}{16}(2\cdot(-1))^2 =$$

$$= \frac{1}{2}.$$

1.7. $$\int_1^{10} x\cdot\delta\left(\sin\frac{\pi x}{3}\right)dx = \int_1^{10} x\cdot\sum_{i=1}^{3}\frac{\delta(x-x_i)}{\left|\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi x}{3}\right)_{x=x_i}\right|}\,dx \ominus$$

$\sin\frac{\pi x}{3} = 0,\quad \frac{\pi x}{3} = \pi n,\quad x = 3n,\ n\in\mathbb{Z}$

$x\in[1,10] \Rightarrow n = 1,2,3.$

$$\ominus \int_1^{10} x\cdot\frac{\delta(x-3)}{\frac{\pi}{3}\cos\pi}\,dx + \int_1^{10} x\cdot\frac{\delta(x-6)}{\frac{\pi}{3}\cos 2\pi}\,dx +$$

$$+\int_1^{10} x\,\frac{\delta(x-9)}{\frac{\pi}{3}\cos 3\pi}\,dx = -\frac{3}{\pi}\cdot 3 + \frac{3}{\pi}\cdot 6 - \frac{3}{\pi}\cdot 9 = -\frac{18}{\pi}.$$

1.8 $\delta(X-x_0)$

Пусть $X - x_0 = \tilde{x} \Rightarrow \delta(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\delta}(k)\cdot e^{-ik\tilde{x}}\,dk.$

$$\tilde{\delta}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tilde{\xi})e^{ik\tilde{\xi}}\,d\tilde{\xi} = e^{ik\tilde{\xi}}\Big|_{\tilde{\xi}=0} = 1,$$

$$\Rightarrow \delta(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik\tilde{x}}\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(X-x_0)}\,dk.$$

1.9 Плотность точечного заряда:

$$\rho(\bar{r}) = e\cdot\delta(\bar{r}-\bar{r}_0) = e\,\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0),$$

$$\| e = \int\rho(\bar{r})\,d\bar{r} = \int e\cdot\delta(\bar{r}-\bar{r}_0)\,d\bar{r} = e \|$$

$$\rho(\bar{r}) = e\,\frac{\delta(r-r_0)\delta(\theta)\delta(\varphi)}{r^2\sin\theta},$$

$$\| e = \int\rho(\bar{r})\,d\bar{r} = e\int\frac{\delta(r-r_0)\delta(\theta)\delta(\varphi)}{r^2\sin\theta}\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = e \|$$

1.10. Заряд q равномерно распределен по поверхности шара радиуса R.

Поверхн. плот.: $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}.$

Объем. плот: $\rho(\bar{r}) = \sigma\cdot\delta(r-R) = \frac{q}{4\pi R^2}\delta(r-R).$

1.10a Заряд q равномерно распределен по тонкому кольцу радиуса R.

Лин. плот.: $\varkappa = \frac{q}{2\pi R}.$

Объем. плот.: $\rho(\bar{r}) = \varkappa\cdot\delta(r-R)\delta(\theta) =$

$$= \frac{q}{2\pi R}\delta(r-R)\delta(\theta).$$

11. $\vec{n}(\theta,\varphi) = \left\{ \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right\} = \{ \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta \}$.

$\overline{n_i} = \frac{1}{4\pi}\int n_i\, d\Omega$, $\overline{n_i n_k} = \frac{1}{4\pi}\int n_i n_k\, d\Omega$, поэтому они будут выражаться через такие тензоры, компоненты которых не зависят от выбора СО.

Т.к. не существует вектора, кроме $\vec{0}$, компоненты которого не зависят от СО, то $\overline{n_i} = 0$.

Тензор $\overline{n_i n_k}$ должен выражаться через симметричный тензор II ранга, компоненты которого одинаковы во всех СО $\Rightarrow$ $\overline{n_i n_k} = \lambda\delta_{ik}$.

Свертка. $\overline{n_i n_i} = n^2 = 1 = 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik}$.

Аналогично, $\overline{n_i n_k n_l} = 0$;

$\overline{n_i n_k n_l n_m} = \frac{1}{15}\left(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}\right)$.

Задание 2. Электростатика. Магнитостатика.

2.1. $\Delta\varphi = -4\pi\rho(\vec{r})$

$\varphi(\vec{r}) = \int \tilde{\varphi}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$, $\rho(\vec{r}) = \int \tilde{\rho}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$,

$\tilde{\varphi}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \varphi(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} d\vec{r}'$,

$\tilde{\rho}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \rho(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} d\vec{r}'$.

$\Delta\int\tilde{\varphi}(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{r}}d\vec{k} = \int\tilde{\varphi}(\vec{k})\Delta e^{i\vec{k}\vec{r}}d\vec{k} = -\vec{k}^2\int\tilde{\varphi}(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{r}}d\vec{k}$,

$-\vec{k}^2\int\tilde{\varphi}(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{r}}d\vec{k} = -4\pi\int\tilde{\rho}(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{r}}d\vec{k}$,

$\tilde{\varphi}(\vec{k}) = \frac{4\pi}{k^2}\tilde{\rho}(\vec{k})$.

$\varphi(\vec{r}) = \int\frac{4\pi}{k^2}\tilde{\rho}(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{r}}d\vec{k} = \frac{1}{2\pi^2}\int\rho(\vec{r}')d\vec{r}'$.

$\int\frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}}{k^2}d\vec{k}$.

Пусть $\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}'$, $\vec{k}\vec{R} = kR\cos\theta$,

$d\vec{k} = 2\pi k^2 dk \sin\theta\, d\theta \Rightarrow$

$$\int\frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}}{k^2}d\vec{k} = 2\pi\int_0^\infty dk\int_0^\pi e^{ikR\cos\theta}\sin\theta\, d\theta =$$

$$= -2\pi\int_0^\infty dk\, \frac{e^{ikR\cos\theta}}{ikR}\Bigg|_0^\pi = \frac{2\pi}{R}\int_0^\infty 2\,\frac{\sin(kR)}{k}dk =$$

$$= \frac{4\pi}{R}\int_0^\infty\frac{\sin(kR)}{kR}d(kR) = \frac{4\pi}{R}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi^2}{R}.$$

$$\varphi(\bar r) = \frac{1}{2\pi^2}\int \rho(\bar r')\,d\bar r' \cdot \frac{2\pi^2}{R} = \int \frac{\rho(\bar r')\,d\bar r'}{|\bar r - \bar r'|}.$$

2. $\varphi(r) = \frac{A}{r}\, e^{-r/b}$.

$\varphi(r) = \frac{A}{r} + \frac{A}{r}\left(e^{-r/b} - 1\right)$: видно, что во 2 слагаемом при $r \to 0$ особенности нет

$$\frac{A}{r}\left(e^{-r/b} - 1\right)\Big|_{r\to 0} = \frac{A}{r}\left(1 - \frac{r}{b} - 1\right) = -\frac{A}{b}.$$

$$\Delta\varphi = A\Delta\frac{1}{r} + A\Delta\frac{1}{r}\left(e^{-r/b} - 1\right) = -4\pi\rho(r),$$

$$A\Delta\frac{1}{r} = -A4\pi\delta(r),$$

$$\Delta\frac{1}{r}\left(e^{-r/b} - 1\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(e^{-r/b} - 1\right),$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\left(e^{-r/b} - 1\right) = -\frac{1}{b}e^{-r/b}; \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(e^{-r/b} - 1\right) = \frac{1}{b^2}e^{-r/b}; \end{cases}$$

$$\Delta\frac{1}{r}\left(e^{-r/b} - 1\right) = \frac{1}{rb^2}e^{-r/b}.$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\delta(r)A + \frac{A}{rb^2}e^{-r/b} = -4\pi\rho(r) \Rightarrow$$

$$\rho(r) = A\delta(r) - \frac{A}{4\pi b^2}\cdot\frac{e^{-r/b}}{r}.$$

В начале координат находится точечный заряд A и сферически-сим-но распределенный объемный заряд с

$$\rho = -\frac{A}{4\pi b^2}\cdot\frac{e^{-r/b}}{r}.$$

Полный заряд: $Q = \int\rho\,dV = \int\left(A\delta(r) - \frac{A}{4\pi b^2}\cdot\frac{e^{-r/b}}{r}\right)\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = 4\pi\int_0^\infty A\delta(r)\,r^2\,dr - \int_0^\infty \frac{A}{b^2}e^{-r/b}\cdot r\,dr = 0 - \frac{A}{b^2}\int_0^\infty r e^{-r/b}\,dr =$

$$= \left\{\begin{matrix} u = r, & du = dr, \\ dv = e^{-r/b}dr, & v = -be^{-r/b}\end{matrix}\right\} = \frac{A}{b^2}\,r\cdot b e^{-r/b}\Big|_0^\infty - \frac{A}{b^2}b\int_0^\infty e^{-r/b}\,dr = 0 + \frac{A}{b^2}\cdot b^2\cdot e^{-r/b}\Big|_0^\infty =$$

$$= A(0 - 1) = -A.$$

2.3. Пусть заряды распределены сферически симметрично.

Рассмотрим сферическую поверхность радиуса R, являющуюся границей распределения зарядов.

По т. Гаусса поток эл. поля через эту поверхность: $4\pi R^2\cdot\bar E = 4\pi\int^R \rho(r')\,d\bar r'$

$$\Rightarrow\quad \bar E = \frac{\bar R}{R^3}\int\rho(r')\,d\bar r' = \frac{4\pi\bar R}{R^3}\int_0^R \rho(r')\,r'^2\,dr'.$$

Потенциал этого поля $\varphi_1 = \frac{1}{R}\int^R \rho(r')\,d\bar r' =$

$$= \frac{4\pi}{R}\int_0^R \rho(r')\,r'^2\,dr'.$$

Начиная со сферической поверхности радиуса R и далее:

$$\varphi_2 = 4\pi\int_R^\infty \frac{\rho(r')}{r'}\,r'^2\,dr' = 4\pi\int_R^\infty \rho(r')\,r'\,dr'.$$

$$\varphi(r) = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{4\pi}{R}\int_0^R \rho(r')\,r'^2\,dr' + 4\pi\int_R^\infty \rho(r')\,r'\,dr'.$$

4.

$$\rho_e(r) = -\frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}.$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\cdot\varphi(r)) = \frac{4e}{a^3} e^{-2r/a},$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi(r)) = \frac{4e}{a^3}\int r\cdot e^{-2r/a}\,dr = \frac{4e}{a^3}\left\{-\frac{a}{2}re^{-2r/a} + \frac{a}{2}\int e^{-2r/a}\,dr\right\} = \frac{4e}{a^3}\left\{-\frac{a}{2}re^{-2r/a} - \frac{a^2}{4}e^{-2r/a} + C\right\}.$$

$$r\varphi(r) = -\frac{2e}{a^2}\left\{\int re^{-2r/a}dr + \frac{a}{2}\int e^{-2r/a}\,dr + \int C dr\right\} =$$

$$= \frac{e}{a}\cdot r\cdot e^{-2r/a} + e\cdot e^{-2r/a} + Cr + \tilde{C}.$$

$$\varphi(r) = \frac{e}{a}e^{-2r/a} + \frac{e}{r}\cdot e^{-2r/a} + C + \frac{\tilde{C}}{r}.$$

Положим $C=0$, $\tilde{C}=-e$, что соответствует потенциалу одиночного $e^{-}\left(-\frac{e}{r}\right)$.

Потенциал эл. облака:

$$\varphi_e(r) = \frac{e}{a}e^{-2r/a} - \frac{e}{r}\left(1 - e^{-2r/a}\right).$$

Потенциал эл. поля в атоме:

$$\varphi(r) = \varphi_e(r) + \varphi_я(r) = \varphi_e(r) + \frac{e}{r}.$$

Энергия взаимодействия эл. облака с ядром:

$$U = \int\rho_e(r)\cdot\varphi_я(r)\,d\tau = -\frac{e}{\pi a^3}\int_0^\infty e^{-2r/a}\cdot\frac{e}{r}\cdot r^2 dr\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = -\frac{4e^2}{\pi a^3}\int_0^\infty re^{-2r/a}\,dr =$$

$$= \frac{4e^2}{\pi a^3}\left\{\frac{a}{2}\underbrace{re^{-2r/a}\Big|_0^\infty}_{0} - \frac{a}{2}\int_0^\infty e^{-2r/a}\,dr\right\} =$$

$$= \frac{4e^2}{\pi a^3}\cdot\frac{a^2}{4}e^{-2r/a}\Big|_0^\infty = -\frac{e^2}{a}.$$

Энергия электронного облака:

$$U_e = \frac{1}{2}\int\rho_e(r)\cdot\varphi_e(r)\,d\tau = \frac{1}{2}\left(-\frac{e}{\pi a^3}\right)\int e^{-2r/a}\cdot\left(\frac{e}{a}e^{-2r/a} - \frac{e}{r}\left(1-e^{-2r/a}\right)\right)d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{e^2}{\pi a^4}4\pi\underbrace{\int_0^\infty e^{-4r/a}r^2dr}_{J_1} + \frac{1}{2}\frac{e^2}{\pi a^3}4\pi\underbrace{\int_0^\infty e^{-2r/a}\left(1-e^{-2r/a}\right)r\,dr}_{J_2}$$

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-4r/a}r^2dr = \left\| \begin{array}{l} u=r^2,\ du=2r\,dr \\ dv=e^{-4r/a}dr,\ v=-\frac{a}{4}e^{-4r/a}\end{array}\right\|$$

$$= \underbrace{-\frac{a}{4}\cdot r^2 e^{-4r/a}\Big|_0^\infty}_{0} + \frac{a}{2}\int_0^\infty r\cdot e^{-4r/a}\,dr =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} u=r,\ du=dr \\ v=-\frac{a}{4}e^{-4r/a}\end{array}\right\| = \underbrace{-\frac{a^2}{8}re^{-4r/a}\Big|_0^\infty}_{0} + \frac{a^2}{8}\int_0^\infty e^{-4r/a}\,dr = -\frac{a^3}{32}e^{-4r/a}\Big|_0^\infty = \frac{a^3}{32}.$$

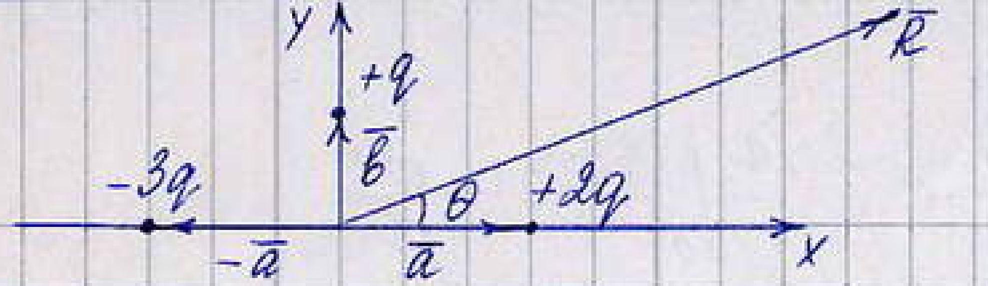
$$J_2 = \int_0^\infty e^{-2r/a}\left(1-e^{-2r/a}\right)r\,dr = \int_0^\infty e^{-2r/a}r\,dr - \int_0^\infty e^{-4r/a}r\,dr = -\frac{a^2}{4}e^{-2r/a}\Big|_0^\infty + \frac{a^2}{16}e^{-4r/a}\Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16} = \frac{a^2}{16}.$$

$$U_e = -\frac{2e^2}{a^4}\cdot\frac{a^3}{32} + \frac{2e^2}{a^3}\cdot\frac{a^2}{16} = -\frac{e^2}{16a} + \frac{e^2}{8a} =$$

$$= \frac{e^2}{16a}.$$

5.



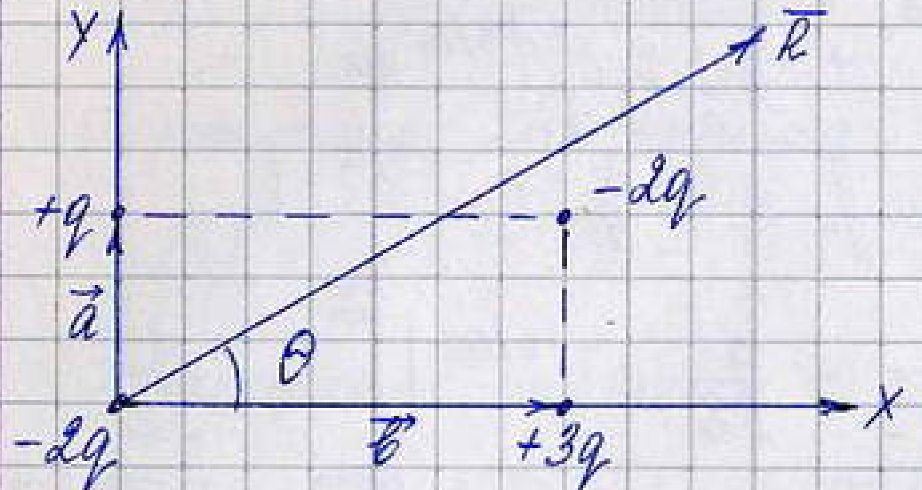
$$\varphi = \sum_i \frac{e_i}{|\bar R - \bar r_i|} = \frac{\sum e_i}{R} + \frac{\bar d \bar R}{R^3} + \dots$$

$$\bar d = \sum_i e_i \bar r_i = q(\bar R - \bar b) + 2q(\bar R - \bar a) - 3q(\bar R - (-\bar a)) = -q\bar b - 2q\bar a - 3q\bar a = -q\bar b - 5q\bar a,$$

$$\bar d\bar R = -q\bar b\cdot\bar R - 5q\bar a\bar R = -qbR\sin\theta - 5qaR\cos\theta = -qR(b\sin\theta + 5a\cos\theta),$$

$$\varphi = -\frac{q}{R^2}(b\sin\theta + 5a\cos\theta).$$

6.



$$\bar d = q(\bar R - \bar a) + 3q(\bar R - \bar b) - 2q\cdot\bar R - 2q(\bar R - (\bar a + \bar b)) = -q\bar a - 3q\bar b + 2q\bar a + 2q\bar b = q\bar a - q\bar b,$$

$$\bar d\bar R = q\bar a\bar R - q\bar b\bar R = qaR\sin\theta - qbR\cos\theta,$$

$$\varphi = \frac{q}{R^2}(a\cdot\sin\theta - b\cos\theta).$$

7. $\sigma_s = q\cdot\sin\theta/r^2$, плоский диск радиуса r, $R \gg r$.

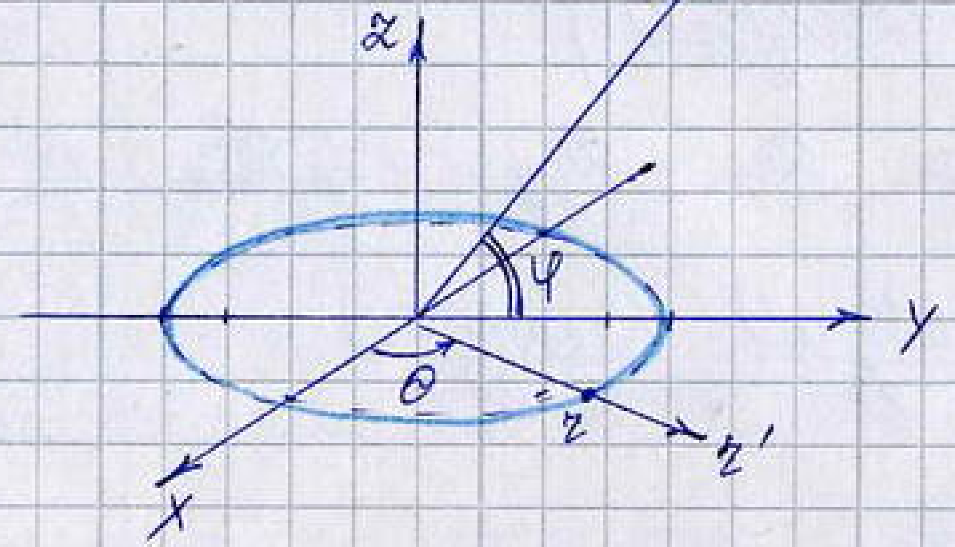
$$\varphi(r) = \frac{\sum_i e_i}{R} + \frac{\bar d\bar R}{R^3} + \dots$$

$$\sum_i e_i = \int_S \sigma_s\, dS = \int q_r \frac{\sin\theta}{r} r'dr'd\theta = q\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^r \frac{r'dr'}{r^2} = 0,$$

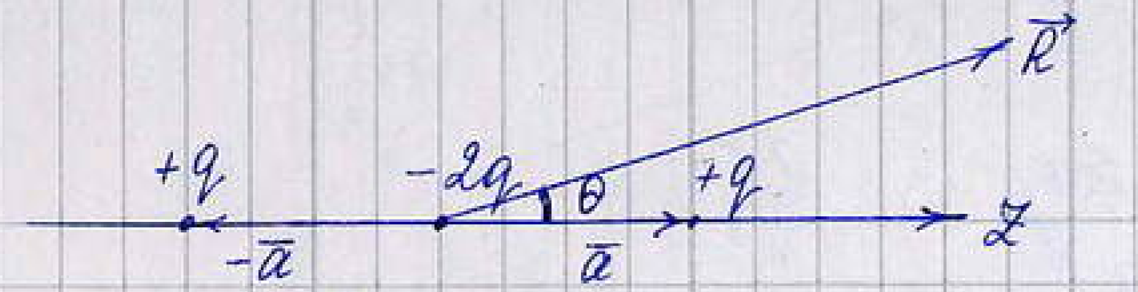
$$\bar d = \int \sigma_s(\bar R - \bar r')dS = \int \sigma_s \cancelto{0}{\bar R}\, dS - \int\sigma_s \bar r'\, dS = -\bar i\int\frac{q}{r^2}\sin\theta\cdot r'\cdot\cos\theta\, r'dr'd\theta - \bar j\int_r\frac{q}{r^2}\sin\theta\cdot r'\sin\theta\, r'dr'd\theta = -\bar i\frac{q}{r^2}\int_0^{2\pi}\sin\theta\, \cancelto{0}{d(\sin\theta)}\cdot\int_0^r r'^2dr' - \bar j\frac{q}{r^2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta\cdot\int_0^r r'^2dr' =$$

$$= -\vec j\,\frac{q}{r^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{r^3}{3} = -\frac{\pi}{3}qr\vec j.$$

$$\varphi(r) = \frac{\bar d\bar R}{R^3} = -\frac{\pi}{3}qrR\cos\varphi\cdot\frac{1}{R^3} = -\frac{\pi}{3}q\cdot\frac{r\cos\varphi}{R^2}$$



2.8



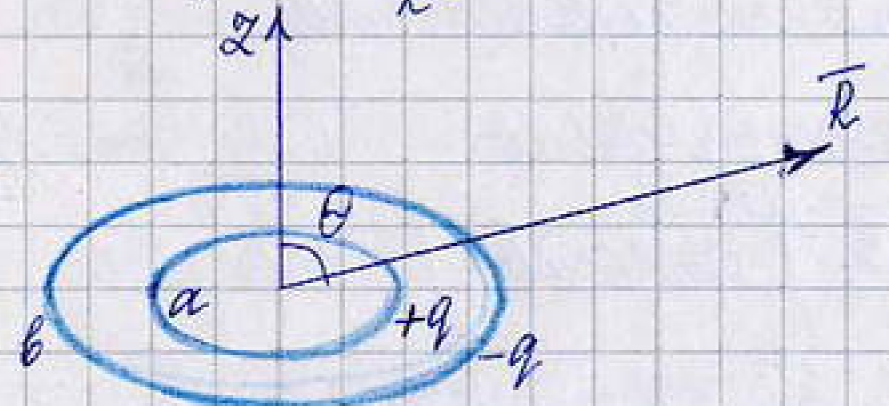
$R \gg a$

$$\sum_a e_a x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{1}{R}\right) = 2a^2 q\left(\frac{3z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3}\right) =$$

$$= 2a^2 q \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{R^3}.$$

$$\varphi = a^2 q \cdot \frac{3\cos^2\theta - 1}{R^3}.$$

2.9



$$\sum_i e_i = 0, \quad \vec d = \vec 0,$$

$$\sum_a e_a x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{1}{R}\right) = -\left\{q a^2 \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{R^3} - q b^2 \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{R^3}\right\}$$

„−", т.к. $D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz}$

$$\varphi = \frac{q(b^2 - a^2)}{2} \cdot \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{R^3}.$$

2.12

Энергия взаимодействия q и $\vec p$:

Считаем, что поле квазиоднородное:

$$U = U^{(1)} = (\mathrm{grad}\,\varphi)_0 \cdot \vec p = -\frac{q\vec r}{r^3} \cdot \vec p.$$

Сила, действующая на диполь:

$$\vec F = (\mathrm{grad}\,\vec p \vec E)_0 = -q\frac{3(\vec p \vec r)\vec p}{r^5} + q\frac{\vec p}{r^3}.$$

Момент сил:

$$\vec K = q \cdot \frac{[\vec p \vec r]}{r^3}.$$

Энергия взаимодействия $\vec p_1$ и $\vec p_2$: 2.13

$$U = (\mathrm{grad}\,\varphi_2)_0 \vec p_1 = -\vec p_1 \vec E_2 = -\vec p_1\left(\frac{3(\vec p_2 \vec n)\vec n}{r^3} - \frac{\vec p_2}{r^3}\right) = \frac{\vec p_1 \vec p_2 - 3(\vec p_1 \vec n)(\vec p_2 \vec n)}{r^3}.$$

Энергия взаимодействия q и $D_{\alpha\beta}$: 2.14

Если φ - потенциал поля, создаваемого q, то:

$$U = \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

Шар радиуса r, $R \gg r$, $\vec\omega = \{0, 0, \omega_z\}$. 2.15

Разложим $\vec A$ по степеням $|\vec R - \vec r'|$:

$$\vec A = \frac{1}{cR}\int \rho \vec v\, dr' + \frac{[\vec m \vec R]}{R^3} + \dots$$

$$\int \rho \vec v\, dr' = \int \rho [\vec \omega \vec r']\, dr = \int \rho (\vec i y \omega_z - \vec j x \omega_z) \cdot r'^2 dr' \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \rho \int \vec i\, r'^3 \sin\theta \cos\varphi\, dr' \sin\theta\, d\theta\, d\varphi -$$

$$- \rho \int \vec j\, r'^3 \sin^2\theta \sin\varphi\, dr'\, d\theta\, d\varphi = 0.$$

$$\vec m = \frac{1}{2c}\int \rho [\vec r\,' \vec v]\, d\tau' = \frac{1}{2c}\int\rho[\vec r\,'[\vec\omega \vec r\,']]\, d\tau' =$$

$$= \frac{1}{2c}\int \rho\left(\vec\omega r'^2 - \vec r\,'(\vec r\,'\vec\omega)\right) d\tau' = \frac{1}{2c}\int\rho\vec\omega r'^4 dr \,\cdot$$

$$\cdot \sin\theta\, d\theta\, d\varphi - \frac{\rho}{2c}\int \vec r\,'\cdot \omega_z z\, d\tau' = \frac{1}{2c}\cdot 4\pi\rho\vec\omega\frac{r^5}{5} -$$

$$-\frac{\rho}{2c}\int \vec r\,' \omega_z z r'^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{c}\rho\omega_z \frac{r^5}{5}\vec k - \frac{\rho}{2c}\omega_z\int \vec r\,' r'^3\cos\theta\cdot\sin\theta\, d\theta\, dr'\, d\varphi \Rightarrow$$

$$= \frac{2}{5}\frac{\pi}{c}\rho r^5\vec\omega - \frac{2}{15}\frac{\pi}{c}\rho\vec\omega r^5 = \frac{4}{15}\frac{\pi}{c}\rho r^5\vec\omega$$

$$\vec A = \frac{[\vec m\vec R]}{R^3} = \frac{4\pi}{3c}\rho\frac{r^5}{5}\cdot\frac{[\vec\omega\vec R]}{R^3},$$

$$[\vec\omega\vec R] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 0 & 0 & \omega_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \vec j\omega_z R_x - \vec i\omega_z R_y$$

$$\vec A = \left\{-\frac{4}{15}\frac{\pi}{c}\rho r^5\frac{\omega_z R_y}{R^3};\ \frac{4}{15}\frac{\pi}{c}\rho r^5\frac{\omega_z R_x}{R^3};\ 0\right\}$$

т.к. $\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3}$, то $\vec A = \frac{4}{15}\cdot\frac{3}{4}q r^2\frac{[\vec\omega\vec R]}{R^3}$,

$$\vec A = \left\{-\frac{qr^2}{5c}\frac{\omega_z R_y}{R^3};\ \frac{qr^2}{5c}\frac{\omega_z R_x}{R^3};\ 0\right\}$$

$$\vec H = \mathrm{rot}\,\vec A = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial R_x} & \frac{\partial}{\partial R_y} & \frac{\partial}{\partial R_z} \\ -\frac{qr^2}{5c}\frac{\omega_z R_y}{R^3} & \frac{qr^2}{5c}\frac{\omega_z R_x}{R^3} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\left\{-\vec i\frac{\partial}{\partial R_z}\cdot\frac{R_x}{R^3} - \vec j\frac{\partial}{\partial R_z}\cdot\frac{R_y}{R^3} + \vec k\left(\frac{\partial}{\partial R_x}\cdot\frac{R_x}{R^3}+\frac{\partial}{\partial R_y}\frac{R_y}{R^3}\right)\right\}\cdot\frac{qr^2}{5c}\omega_z =$$

$$=\left\{\vec i\frac{3R_xR_z}{R^5} + \vec j\frac{3R_yR_z}{R^5} + \vec k\left(\frac{1}{R^3} - \frac{3R_x^2}{R^5} + \frac{1}{R^3} - \frac{3R_y^2}{R^5}\right)\right\}\frac{qr^2}{5c}\omega_z =$$

$\Rightarrow$

$$\vec r\,' = \vec i r'\sin\theta\cos\varphi + \vec j r'\sin\theta\sin\varphi + \vec k r'\cos\theta$$

$$\vec i \Rightarrow \int r'^4 \cos\theta\sin^2\theta\cos\varphi\, d\theta\, dr'\, d\varphi = \int r'^4 dr' \,\cdot$$

$$\cdot\int\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\, d\Omega = \int r'^4 dr'\cdot 4\pi\,\overline{n_1 n_3} = 0,$$

$$\vec j \Rightarrow \int r'^4\cos\theta\sin^2\theta\sin\varphi\, d\theta\, dr'\, d\varphi = \int r'^4 dr'\,\cdot$$

$$\cdot\int\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\, d\Omega = \int r'^4 dr'\cdot 4\pi\, \underset{0}{\overline{n_2 n_3}} = 0.$$

$$\vec k \Rightarrow \int r'^4\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\, dr'\, d\varphi = -2\pi\frac{r^5}{5}\int_0\cos^2\theta\, d(\cos\theta) =$$

$$= -2\pi\frac{r^5}{5}\cdot\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^\pi = \frac{2}{15}r^5\cdot 2\pi = \frac{4\pi}{15}r^5.$$

$$=\left\{\frac{3R_xR_z}{R^5}\vec i + \frac{3R_yR_z}{R^5}\vec j + \left(\frac{3R_z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3}\right)\vec k\right\}\frac{qr^2}{5c}\omega_z.$$

$$\vec H = \frac{qr^2}{5c}\omega_z\frac{1}{R^5}\left\{3R_xR_z;\ 3R_yR_z;\ 3R_z^2 - R^2\right\}.$$

Задание 3. Плоские волны. Потенциалы Лиенара - Вихерта.

3.1. а) линейная поляризация:

$\vec{E}(z,t) = E_x\vec{i} = E_1\cos(\omega t - kz + \alpha)\vec{i}$,

$\vec{H}(z,t) = H_y\vec{j} = E_x\vec{j} = E_1\cos(\omega t - kz + \alpha)\vec{j}$

или

$\vec{E}(z,t) = E_y\vec{j} = \pm E_2\sin(\omega t - kz + \alpha)\vec{j}$,

$\vec{H}(z,t) = H_x\vec{i} = -E_y\vec{i} = \mp E_2\sin(\omega t - kz + \alpha)\vec{i}$

б) круговая поляризация:

$\vec{E}(z,t) = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = E_0\cos(\omega t - kz + \alpha)\vec{i} \pm$

$\pm E_0\sin(\omega t - kz + \alpha)\vec{j}$,

$\vec{H}(z,t) = H_x\vec{i} + H_y\vec{j} = -E_y\vec{i} + E_x\vec{j} = \mp E_0\sin(\omega t -$

$- kz + \alpha)\vec{i} + E_0\cos(\omega t - kz + \alpha)\vec{j}$.

3.2. Для эллиптич. пол-ции:

$\vec{E}(z,t) = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = E_1\cos(\omega t - kz + \alpha)\vec{i} \pm$

$\pm E_2\sin(\omega t - kz + \alpha)\vec{j}$.

В плоской волне:

а) объемная плотность энергии

$w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) = \frac{1}{4\pi}E^2$

$w = \frac{1}{4\pi}\left(E_1^2\cos^2(\omega t - kz + \alpha) + E_2^2\sin^2(\omega t - kz + \alpha) \pm\right.$

$\left.\pm 2E_1E_2\cos(\omega t - kz + \alpha)\cdot\sin(\omega t - kz + \alpha)\cdot(\underbrace{\vec{i}\,\vec{j}}_{0})\right) =$

$= \frac{1}{4\pi}E_1^2\cos^2(\omega t - kz + \alpha) + \frac{1}{4\pi}E_2^2\sin^2(\omega t - kz + \alpha)$.

б) плотность потока энергии:

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\vec{H}] = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}[\vec{k}\vec{E}]] = \frac{c}{4\pi}E^2\vec{k} = c\cdot w\cdot\vec{k}$

$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(E_1^2\cos^2(\omega t - kz + \alpha) + E_2^2\sin^2(\omega t - kz + \alpha)\right)\vec{k}$.

$\bar{r} = \bar{r}_0(t)$. 3.3.

Запаздывающие потенциалы:

$$\varphi(\bar{r},t) = \int\frac{\rho\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{c}\right)d\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|} + \varphi_0(\bar{r},t),$$

$$\vec{A}(\bar{r},t) = \frac{1}{c}\int\frac{\vec{j}\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{c}\right)d\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|} + \vec{A}_0(\bar{r},t).$$

Т.к. заряд q точечный, то $\rho = e\cdot\delta(\bar{r}' - \bar{r}_0)$,

$\vec{j} = \rho\vec{v}_0 = e\delta(\bar{r}' - \bar{r}_0)\,\bar{v}_0(t) \Rightarrow$

$$\varphi(\bar{r},t) = e\int\frac{\delta(\bar{r}' - \bar{r}_0(\tau))d\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|} = e\int\frac{\delta\left(\bar{r}' - \bar{r}_0\left(t - \frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{c}\right)\right)d\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

Пусть $\ell_x = x' - x_0(\tau)$, $\ell_y = y' - y_0(\tau)$, $\ell_z = z' - z_0(\tau)$.

Рассмотрим движение q вдоль оси x_0, т.е. $v_x = v_0$:

$\frac{\partial \ell_x}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x'} =$

$$= 1 - v_0 \frac{\partial}{\partial x'}\left\{t - \frac{|\bar r - \bar r'|}{c}\right\} = 1 - \frac{v_0}{c}\cdot\frac{x-x'}{|\bar r - \bar r'|};$$

$$\frac{\partial l_x}{\partial y'} = 0 = \frac{\partial l_x}{\partial z'}; \quad \frac{\partial l_y}{\partial x'} = 0; \quad \frac{\partial l_y}{\partial y'} = 1; \quad \frac{\partial l_y}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial l_z}{\partial x'} = \frac{\partial l_z}{\partial y'} = 0; \quad \frac{\partial l_z}{\partial z'} = 1.$$

Якобиан: $\dfrac{\partial(l_x, l_y, l_z)}{\partial(x', y', z')} = 1 - \dfrac{v_0(x-x')}{c|\bar r - \bar r'|} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial(l_x, l_y, l_z)}{\partial(x', y', z')} = 1 - \frac{\bar v_0(\bar r - \bar r')}{c|\bar r - \bar r'|}.$$

Тогда $dx'dy'dz' = \dfrac{\partial(x', y', z')}{\partial(l_x, l_y, l_z)} dl_x dl_y dl_z =$

$$= \frac{dl_x dl_y dl_z}{1 - \frac{\bar v_0(\bar r - \bar r')}{c|\bar r - \bar r'|}} = \frac{d\bar l}{1 - \frac{\bar v_0(\bar r - \bar r')}{c|\bar r - \bar r'|}}.$$

$$\varphi(\bar r, t) = e\int \frac{\delta(\bar l)\, d\bar l}{|\bar r - \bar l - \bar r_0| - \frac{(\bar r - \bar l - \bar r_0)}{c}\bar v_0\left(t - \frac{\bar r - \bar l - \bar r_0}{c}\right)} =$$

$$= \frac{e}{|\bar r - \bar r_0| - \frac{\bar v_0(\tau)}{c}(\bar r - \bar r_0)} = \frac{e}{R(\tau) - \frac{\bar v_0(\tau)\bar R(\tau)}{c}}.$$

$$A(\bar r, t) = \frac{e}{c}\int \frac{\delta(\bar r' - \bar r_0(\tau))\,\bar v_0(\tau)\, d\bar r'}{|\bar r - \bar r'|} =$$

$$= \frac{e}{c}\int \frac{\delta\left(\bar r' - \bar r_0\left(t - \frac{|\bar r - \bar r'|}{c}\right)\right)\bar v_0\left(t - \frac{|\bar r - \bar r'|}{c}\right) d\bar r'}{|\bar r - \bar r'|} =$$

$$= \frac{e}{c}\int \frac{\delta(\bar l)\,\bar v_0\left(t - \frac{|\bar r - \bar l - \bar r_0|}{c}\right) d\bar l}{|\bar r - \bar l - \bar r_0| - \frac{(\bar r - \bar l - \bar r_0)}{c}\bar v_0\left(t - \frac{\bar r - \bar l - \bar r_0}{c}\right)} =$$

$$= \frac{e\bar v_0(\tau)}{|\bar r - \bar r_0| - \frac{\bar v_0(\tau)}{c}(\bar r - \bar r_0)} = \frac{e\bar v_0(\tau)}{R(\tau) - \frac{\bar v_0(\tau)\cdot\bar R(\tau)}{c}}.$$

$$\Rightarrow \bar A = \frac{\bar v_0}{c}\varphi.$$

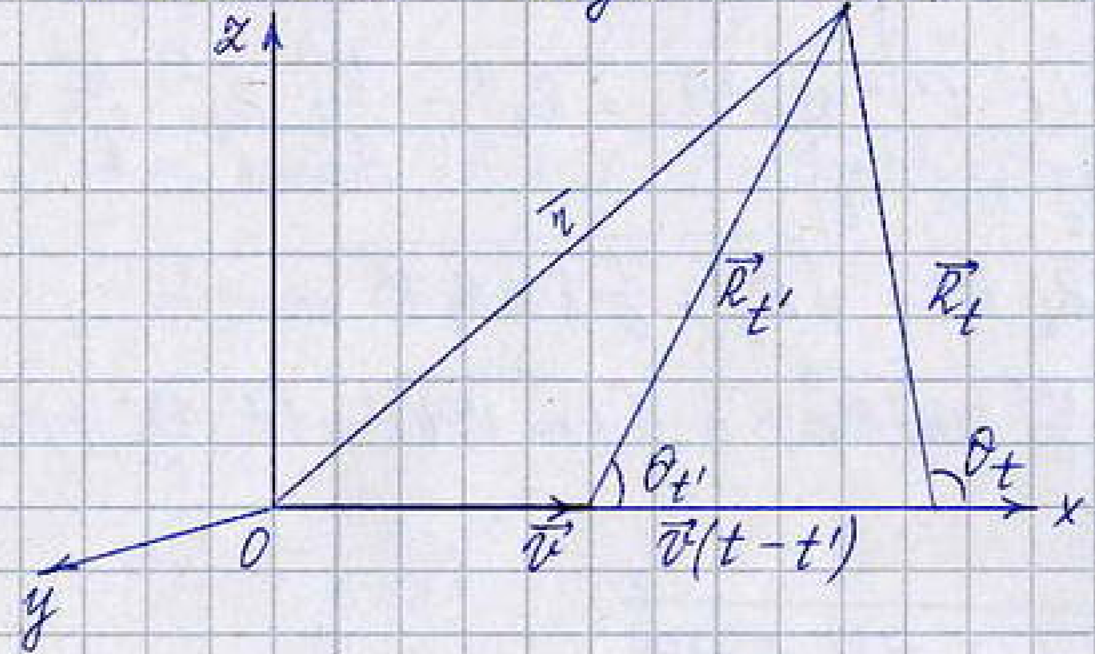
3.4.

Пусть заряд q движется равномерно вдоль оси Ox со скоростью $\bar v = \{v_x, 0, 0\}$.

$$\bar r = \{x, y, z\}, \quad \bar R_t = \{x - v_x t, y, z\}.$$

$$\varphi(\bar r, t) = \frac{e}{R(t') - \frac{\bar v(t')\bar R(t')}{c}}; \quad \bar A(\bar r, t) = \frac{e\bar v(t')}{R(t') - \frac{\bar v(t')\bar R(t')}{c}}.$$

В нашем случае $\bar v(t') \equiv \bar v$.



$$t = t' + \frac{|\bar r - \bar r'|}{c} = t' + \frac{|\bar R|}{c} = t' + \frac{R(t')}{c}.$$

Обозначим $R(t') = R_{t'}$, $R(t) = R_t$.

$$\left(R_{t'} - \frac{1}{c}\bar R_{t'}\bar v\right)^2 = R_{t'}^2 - \frac{2}{c}R_{t'}\bar R_{t'}\bar v + \frac{1}{c^2}R_{t'}^2 v^2\cos^2\theta_{t'}$$

$$R_{t'}^2 = R_t^2 + v^2(t-t')^2 - 2R_t v(t-t')\cos(\pi - \theta_t) =$$

$$= R_t^2 + v^2(t-t')^2 + 2R_t v(t-t')\cos\theta_t.$$

$$\bar R_{t'}\bar v = R_{t'} v\cos\theta_{t'}$$

$$R_t^2 + v^2(t-t')^2 + 2R_t v(t-t')\cos\theta_t - \frac{2}{c}R_{t'}^2 v\cos\theta_{t'} +$$

$$+ \frac{1}{c^2}R_{t'}^2 v^2\cos^2\theta_{t'} = R_t^2 + v^2(t-t')^2 + 2R_t v(t-t')\cos\theta_t -$$

В то же время, $R_{t'} = c(t-t')$

$$-\frac{2}{c}c^2(t-t')^2 v\cdot\cos\theta_{t'} + \frac{1}{c^2}c^2(t-t')^2\cdot v^2\cos^2\theta_{t'} =$$

$$R_t^2 + v^2(t-t')^2 + v^2(t-t')^2\cos^2\theta_{t'} + 2R_t v(t-t')\cos\theta_t -$$

$$-2c(t-t')^2 v\cos\theta_{t'} = R_t^2 + v^2(t-t')^2 + v^2(t-t')^2\cdot$$

$$\cos^2\theta_{t'} - 2v(t-t')\{\underbrace{R_{t'}\cos\theta_{t'} + R_t\cos(\pi-\theta_t)}_{v(t-t')}\} =$$

$$= R_t^2 + v^2(t-t')^2 - 2v^2(t-t')^2 + v^2(t-t')^2\cos^2\theta_{t'} =$$

$$= R_t^2 - v^2(t-t')^2\sin^2\theta_{t'} = R_t^2 - \frac{v^2}{c^2}R_{t'}^2\cdot\frac{R_t^2}{R_{t'}^2}\sin^2\theta_t =$$

$$= R_t^2 - \frac{v^2}{c^2}R_t^2\sin^2\theta_t$$

Из рисунка $\frac{\sin\theta_{t'}}{\sin\theta_t} = -\frac{R_t}{R_{t'}}$.

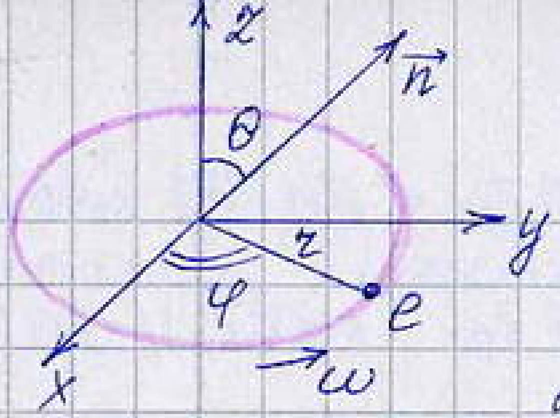
$$\Rightarrow R_{t'} - \frac{1}{c}R_{t'}\vec{v} = \sqrt{R_t^2 - \frac{1}{c}[vR_t]^2} =$$

$$= R_t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta_t} = \sqrt{(x-v_x t)^2 + \left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}$$

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{(x-v_x t)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}},$$

$$\vec{A} = \frac{e\vec{v}}{c\sqrt{(x-v_x t)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}}.$$

Задание 4. Излучение нерелятивистской частицы, движущейся по заданному закону.



Условие: окружность радиуса r (4.2)

$$dJ = \frac{e^2}{4\pi c^3}[\vec{w}\vec{n}]^2 d\Omega,$$

$$\vec{w} = -\omega^2\vec{r} = -\omega^2 r\vec{n}', \text{ где } \vec{n}' = \{\cos\omega t', \sin\omega t', 0\},$$

$$\vec{n} = \{\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\}.$$

$$dJ = \frac{e^2 r^2\omega^4}{4\pi c^3}[\vec{n}'\vec{n}]^2 d\Omega.$$

$$[\vec{n}'n]^2 = 1-(\vec{n}'\vec{n})^2 = 1-\overline{(n_1\cos\omega t' +}$$

$$\overline{+ n_2\sin\omega t')^2} = 1-\overline{(n_1^2\cos^2\omega t' + n_2^2\sin^2\omega t' +}$$

$$\overline{+ 2n_1n_2\cos\omega t'\sin\omega t')} = 1-\frac{1}{2}(n_1^2+n_2^2) =$$

$$= 1-\frac{1}{2}\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta).$$

$$dJ = \frac{e^2r^2\omega^4}{4\pi c^3}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)d\Omega.$$

$$\int(1+\cos^2\theta)d\Omega = 4\pi\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{16\pi}{3}.$$

$$J = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega^4 r^2}{c^3}.$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c}[\dot{\vec{A}}\vec{n}] = \frac{e}{c^2R}[\vec{w}\vec{n}] = \frac{-e\omega^2 r}{c^2R}[\vec{n}'\vec{n}]$$

$$\begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\\ \sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\theta\\ \vec{e}_\varphi\end{pmatrix}$$

$$[\vec{n}'\vec{n}] = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\omega t' & \sin\omega t' & 0\\ n_1 & n_2 & n_3\end{vmatrix} = \vec{i}\cdot n_3\sin\omega t' +$$

$$+\vec{j}(-n_3\cos\omega t') + \vec{k}(n_2\cos\omega t' - n_1\sin\omega t') =$$

$= (\cos\varphi \sin\theta\, \bar e_r + \cos\varphi\cos\theta\, \bar e_\theta - \sin\varphi\, \bar e_\varphi)\cdot \cos\theta\, \bar e_\varphi \sin\omega t' +$

$+ (\sin\varphi\sin\theta\, \bar e_r + \sin\varphi\cos\theta\, \bar e_\theta + \cos\varphi\, \bar e_\varphi)(-\cos\theta\, \bar e_\varphi)\cos\omega t' +$

$+ (\cos\theta\, \bar e_r - \sin\theta\, \bar e_\theta)(\sin\theta\sin\varphi\, \bar e_\theta \cos\omega t' -$

$- \sin\theta\cos\varphi\, \bar e_\theta \sin\omega t') = (\cos\varphi \sin\theta\cos\theta\, \bar e_r +$

$+ \cos\varphi\cos^2\theta\, \bar e_\theta - \sin\varphi\cos\theta\, \bar e_\varphi)\sin\omega t' - (\sin\varphi\sin\theta\cos\theta\, \bar e_r +$

$+ \sin\varphi\cos^2\theta\, \bar e_\theta + \cos\varphi\cos\theta\, \bar e_\varphi)\cos\omega t' + (\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\, \bar e_r$

$- \sin^2\theta\sin\varphi\, \bar e_\theta)\cos\omega t' - (\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\, \bar e_r - \sin^2\theta\cos\varphi\, \bar e_\theta)$

$\cdot \sin\omega t' = \cos\varphi\, \bar e_\theta \sin\omega t' - \sin\varphi\, \bar e_\theta \cos\omega t' - \sin\varphi\cos\theta\, \bar e_\varphi \cdot$

$\cdot \sin\omega t' - \cos\varphi\cos\theta\, \bar e_\varphi \cos\omega t' = \bar e_\theta(\cos\varphi\sin\omega t' -$

$- \sin\varphi\cos\omega t') - \bar e_\varphi(\sin\varphi\sin\omega t' + \cos\varphi\cos\omega t')\cos\theta =$

$= \bar e_\theta \cdot \sin(\omega t' - \varphi) - \bar e_\varphi \cos(\omega t' - \varphi)\cos\theta =$

$= -\cos\theta \cdot Re\{\exp(-i(\omega t' - \varphi))\}\bar e_\varphi +$

$+ Im\{\exp(-i(\omega t' - \varphi))\}\bar e_\theta = (-\cos\theta\, \bar e_\varphi +$

$+ i\,\bar e_\theta)\cdot Re\{\exp(-i(\omega t' - \varphi))\}.$

$$\bar H = \frac{e\omega^2 r}{c^2 R}(\cos\theta\, \bar e_\varphi - i\,\bar e_\theta)\, Re\{\exp(-i(\omega t' - \varphi))\}.$$

Если $\cos\theta > 0$ (излучение в верх. полусферу), то поляр-ция — левая эллиптич.
Если $\cos\theta < 0$, то поляр-ция — правая эллипт.
Если $\theta = 0$, то — левая круговая.
Если $\theta = \pi$, то — правая круговая.

Волны, излучаемые в экваториальной плоскости, имеют линейную поляр-цию.

Круговой контур радиуса a с пост. током J вращается с пост. ω в/г оси, к-ая образует угол α с нормалью к плоскости контура. 4.3.

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}[\ddot{\bar\mu}\,\bar n]^2 d\Omega,$$

$$\bar\mu = \frac{JS}{c}\bar n'' = \frac{J\pi a^2}{c}\bar n'' = \mu\bar n'',$$

$\bar n'' = \{\sin\alpha\cos\omega t', \sin\alpha\sin\omega t', \cos\alpha\},$

$\ddot{\bar\mu} = -\omega^2\mu\sin\alpha\,\bar n', \quad \bar n' = \{\cos\omega t', \sin\omega t', 0\}.$

$$dI = \frac{\mu^2\omega^4\sin^2\alpha}{4\pi c^3}[\bar n'\bar n]^2 d\Omega$$

Аналогично 4.2, $[\bar n'\bar n] = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) \Rightarrow$

$$dI = \frac{\mu^2\omega^4\sin^2\alpha}{8\pi c^3}(1+\cos^2\theta)\,d\Omega.$$

$$I = \frac{2}{3}\cdot\frac{\mu^2\omega^4\sin^2\alpha}{c^3} = \frac{2}{3}\frac{J^2\pi^2 a^4\omega^4\sin^2\alpha}{c^5}.$$

$$\bar H = \frac{1}{c}[\dot{\bar A}\bar n] = \frac{1}{c}\left[\frac{[\ddot{\bar\mu}\bar n]}{cR}\bar n\right] = \frac{1}{c^2R}[[\ddot{\bar\mu}\bar n]\bar n],$$

$$\bar E = [\bar H\bar n] = \frac{1}{c^2R}[\bar n\ddot{\bar\mu}] = \frac{-\omega^2\mu\sin\alpha}{c^2R}[\bar n\bar n'],$$

$$[\bar n\bar n'] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ \cos\omega t' & \sin\omega t' & 0 \end{vmatrix} = -\bar i\, n_3\sin\omega t' +$$

$+\bar j\, n_3\cos\omega t' + \bar k(n_1\sin\omega t' - n_2\cos\omega t') =$

$$= -(\cos\varphi \sin\theta \bar{e}_r + \cos\varphi \cos\theta \bar{e}_\theta - \sin\varphi \bar{e}_\varphi) \cos\theta \sin\omega t' +$$
$$+ (\sin\varphi \sin\theta \bar{e}_r + \sin\varphi \cos\theta \bar{e}_\theta + \cos\varphi \bar{e}_\varphi) \cos\theta \cos\omega t' +$$
$$+ (\cos\theta \bar{e}_r - \sin\theta \bar{e}_\theta)(\sin\theta \cos\varphi \sin\omega t' - \sin\theta \sin\varphi \cos\omega t')$$
$$= (\cos\theta \bar{e}_\varphi - i\bar{e}_\theta) Re\{\exp(-i(\omega t' - \varphi))\}.$$
$$\bar{E} = \frac{\omega^2 J \pi a^2 \sin\alpha}{c^3 R} (i\bar{e}_\theta - \cos\theta \bar{e}_\varphi) Re\{\exp(-i(\omega t' - \varphi))\}.$$

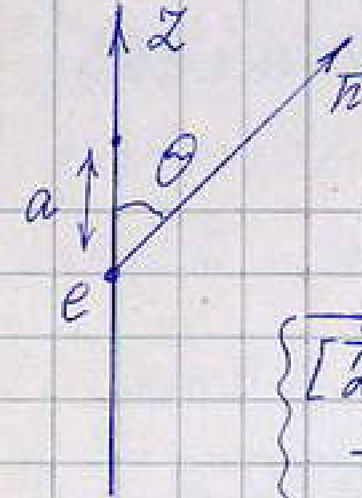
$$[\bar{n}'\bar{n}] = \bar{e}_\theta (\cos\varphi \sin\omega t' - \sin\varphi \cos\omega t') - \bar{e}_\varphi \cos\theta$$
$$(\sin\varphi \sin\omega t' + \cos\varphi \cos\omega t')$$

$$[[\bar{n}'\bar{n}]\bar{n}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \cos\varphi \sin\omega t' - \sin\varphi \cos\omega t' & (-\sin\varphi \sin\omega t' - \cos\varphi \cos\omega t') \cdot \cos\theta \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\{(\cos\varphi \sin\omega t' - \sin\varphi \cos\omega t') n_3 + n_2 (\sin\varphi \sin\omega t' + \cos\varphi \cos\omega t')\cos\theta\} - \vec{j}(\sin\varphi \sin\omega t' + \cos\varphi \cos\omega t') \cos\theta\, n_1 -$$
$$- \vec{k}(\cos\varphi \sin\omega t' - \sin\varphi \cos\omega t') n_1 =$$
$$= (\cos\varphi \sin\theta \bar{e}_r + \cos\varphi \cos\theta \bar{e}_\theta - \sin\varphi \bar{e}_\varphi)(\sin(\omega t' - \varphi) \cdot \cos\theta + \cos(\omega t' - \varphi) \cos\theta \sin\theta \sin\varphi) - (\sin\varphi \sin\theta \bar{e}_r +$$
$$+ \sin\varphi \cos\theta \bar{e}_\theta + \cos\varphi \bar{e}_\varphi) \cos(\omega t' - \varphi) \cos\theta \sin\theta \cos\varphi -$$
$$- (\cos\theta \bar{e}_r - \sin\theta \bar{e}_\theta) \sin(\omega t' - \varphi) \sin\theta \cos\varphi =$$
$$= \cos\varphi \cos^2\theta \sin(\omega t' - \varphi) \bar{e}_\theta - \sin\varphi \cos\theta \sin(\omega t' - \varphi) \bar{e}_\varphi +$$
$$+ \sin\varphi \sin^2\theta \cos\varphi \cancel{\cos\theta} \bar{e}_r \cos(\omega t' - \varphi) - \sin^2\varphi \sin\theta \cos\theta \cdot$$
$$\cdot \cos(\omega t' - \varphi) \bar{e}_\varphi - \sin\varphi \cos\varphi \sin^2\theta \cancel{\cos\theta} \cos(\omega t' - \varphi) \bar{e}_r -$$
$$- \cos^2\varphi \sin\theta \cos\theta \cos(\omega t' - \varphi) \bar{e}_\varphi + \cos\varphi \sin^2\theta \sin(\omega t' - \varphi) \bar{e}_\theta =$$

$$= \cos\varphi \sin(\omega t' - \varphi) \vec{e}_\theta - \sin\theta \cos\theta \cos(\omega t' - \varphi) \vec{e}_\varphi -$$
$$- \sin\varphi \cos\theta \sin(\omega t' - \varphi) \vec{e}_\varphi$$

4.



$a \ll c/\omega$, e, ω, a.

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}\cdot\frac{1}{36c^2}\,[\dddot{D}\,n]^2\,d\Omega$$

$$\overline{[\dddot{D}n]^2} = \overline{\dddot{D}^2} - \overline{(\dddot{D}n)^2} = \overline{\dddot{D}_\alpha \dddot{D}_\alpha} -$$

$$- \overline{\dddot{D}_\alpha n_\alpha \dddot{D}_\beta n_\beta} = \dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\gamma}\overline{n_\beta n_\gamma} -$$

$$- \dddot{D}_{\alpha\gamma}\dddot{D}_{\beta\delta}\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = \frac{1}{3}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\gamma} -$$

$$- \frac{1}{15}\dddot{D}_{\alpha\gamma}\dddot{D}_{\beta\delta}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\beta} - \frac{1}{15}\dddot{D}_{\alpha\delta}\dddot{D}_{\delta\alpha} - \frac{1}{15}\underbrace{\cancel{\dddot{D}_{\alpha\alpha}}}_{0}\dddot{D}_{\beta\beta} -$$

$$- \frac{1}{15}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\beta\alpha} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{15}\right)\dddot{D}^2_{\alpha\beta} = \frac{1}{5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}$$

$$\overline{I} = \frac{1}{180c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}$$

$$D_{\alpha\beta} = e(3x_\alpha x_\beta - x^2\delta_{\alpha\beta}), \quad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}$$

$$D_{zz} = e(2z^2 - z^2) = 2ez^2,$$

$$z^2 = a^2\cos^2\omega t', \quad \dot{D}_{zz} = -2e\cdot 2a^2\omega\cos\omega t'\sin\omega t' =$$

$$= -2a^2\omega e\sin 2\omega t', \ldots, \quad \dddot{D}_{zz} = 8ea^2\omega^3\sin\omega t'$$

$$\dddot{D}^2_{\alpha\beta} = \frac{3}{2}\dddot{D}^2_{zz} \Rightarrow \overline{I}_q = \frac{1}{180c^5}\cdot\frac{3}{2}\cdot 64e^2a^4\omega^6\,\overline{\sin^2\omega t'} =$$

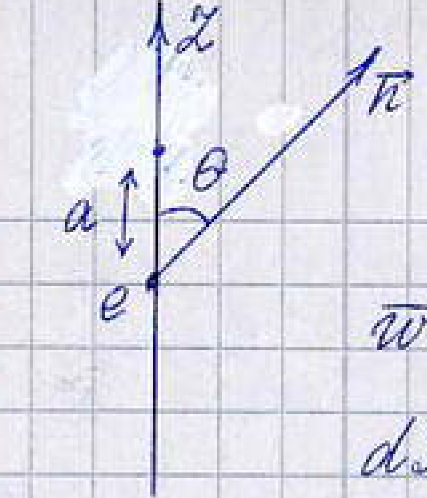
$$= \frac{4}{15c^5}e^2a^4\omega^6.$$

$$\overline{I}_q = \frac{4}{15}\frac{e^2a^4\omega^6}{c^5}$$

Частота кв. излучения в 2 раза больше частоты дипольного излучения.

$$\frac{\overline{I}_q}{\overline{I}_d} = \frac{4}{15}\,\frac{e^2a^4\omega^6}{c^5}\cdot\frac{3c^3}{e^2a^2\omega^4} = \frac{4}{5}\,\frac{a^2\omega^2}{c^3},$$

4.1.



$a \ll \frac{c}{\omega}$, e, ω, a.

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3}[\overline{w}\,\overline{n}]^2\,d\Omega,$$

$$\overline{w} = -\omega^2\overline{r} = -\omega^2 a\cos\omega t'\,\overline{k},$$

$$dI = \frac{e^2a^2\omega^4}{4\pi c^3}\cos^2\omega t'\,[\overline{n}'\overline{n}]^2\,d\Omega,$$

где $\overline{n}' = \{0, 0, 1\}$, $\overline{n} = \{\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\}$

$$[\overline{n}'\overline{n}]^2 = \sin^2\theta \Rightarrow dI = \frac{e^2a^2\omega^4}{8\pi c^3}\sin^2\theta\,d\Omega,$$

$$\int\sin^2\theta\,d\Omega = 4\pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}.$$

$$\overline{I} = \frac{e^2a^2\omega^4}{3c^3}.$$

$$\overline{H} = \frac{1}{c}[\dot{\overline{A}}\,\overline{n}] = \frac{e}{c^2R}[\overline{w}\,\overline{n}] = -\frac{e\omega^2 a}{c^2R}[\overline{n}'\overline{n}]\cdot\cos\omega t'$$

$$\begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\\ \sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{e}_r\\ \overline{e}_\theta\\ \overline{e}_\varphi\end{pmatrix}$$

$$[\overline{n}'\overline{n}] = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ n_1 & n_2 & n_3\end{vmatrix} = -\vec{i}\,n_2 + \vec{j}\,n_1 =$$

$$= -(\cos\varphi\sin\theta\,\overline{e}_r + \cos\varphi\cos\theta\,\overline{e}_\theta - \sin\varphi\,\overline{e}_\varphi)\sin\theta\sin\varphi +$$

$$+ (\sin\varphi\sin\theta\,\overline{e}_r + \sin\varphi\cos\theta\,\overline{e}_\theta + \cos\varphi\,\overline{e}_\varphi)\sin\theta\cos\varphi =$$

$$= \sin\theta\,\overline{e}_\varphi,$$

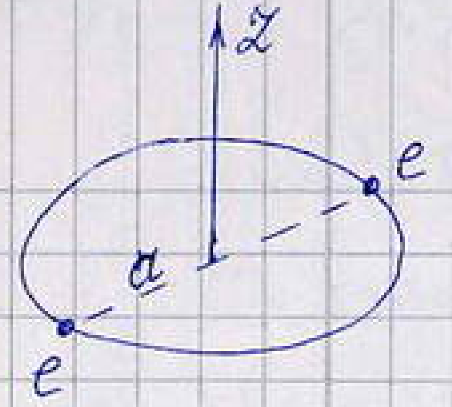
$$\overline{H} = -\frac{e\omega^2 a}{c^2R}\sin\theta\,\overline{e}_\varphi\,\mathrm{Re}\{\exp(-i\omega t')\}.$$

Поляризация линейная.

Вдоль оси Oz ($\theta = 0, \pi$) волны не излучаются.

$[\overline{n}''\overline{n}]^2 = (\overline{n}'')^2 - (\overline{n}''\overline{n})^2$, где $\overline{n}'' = \{0, 0, \cos\omega t'\}$.

4.5.



$e, a, \omega.$

$\bar d = \bar 0, \ \bar m = \bar 0.$

$$D_{\alpha\beta} = \sum_a e_a (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})$$

Рассмотрим в общем случае: $\alpha \ \forall$.

$$D_{xx} = e(3a^2\cos^2\omega t' - a^2 + 3a^2\cos^2(\omega t' - \alpha) - a^2) =$$
$$= ea^2(3\cos^2\omega t' - 2 + 3\cos^2(\omega t' - \alpha)) =$$
$$= ea^2(2\cos^2\omega t' - \sin^2\omega t' + 2\cos^2(\omega t' - \alpha) - \sin^2(\omega t' - \alpha)) = ea^2\left(\frac{3}{2}(1 + \cos 2\omega t') - 2 + \frac{3}{2}(\cos 2(\omega t' - \alpha) + 1)\right) = ea^2\left(3 - 2 + \frac{3}{2}\cos 2\omega t' + \frac{3}{2}\cos 2(\omega t' - \alpha)\right) = ea^2(3\cos(2\omega t' - \alpha)\cos\alpha + 1).$$

$$D_{yy} = ea^2(1 - 3\cos(2\omega t' - \alpha)\cos\alpha).$$

$$D_{zz} = -2ea^2.$$

$$D_{yx} = D_{xy} = \sum_a 3e_a xy = 3ea^2(\cos\omega t' \sin\omega t' + \cos(\omega t' - \alpha)\cdot \sin(\omega t' - \alpha)) = 3ea^2 \sin(2\omega t' - \alpha)\cos\alpha.$$

$$D_{yz} = D_{xz} = 0.$$

$$\bar D = \vec e_x(D_{xx}n_x + D_{xy}n_y) + \vec e_y(D_{yy}n_y + D_{yx}n_x) + \bar e_z(D_{zz}n_z) = ea^2[3\cos(2\omega t' - \alpha)\cos\alpha + 1)\cdot \cos\varphi\sin\theta + 3\sin(2\omega t' - \alpha)\cos\alpha \cdot \sin\varphi\sin\theta]\bar e_x + ea^2[(1 - 3\cos(2\omega t' - \alpha)\cos\alpha)\cdot\sin\varphi\sin\theta +$$
$$+ 3\sin(2\omega t' - \alpha)\cos\alpha\cos\varphi\sin\theta]\bar e_y + [-2ea^2\cos\theta]\bar e_z,$$

$$(\cos(2\omega t' - \alpha))''' = 8\omega^3\sin(2\omega t' - \alpha),$$
$$(\sin(2\omega t' - \alpha))''' = -8\omega^3\cos(2\omega t' - \alpha).$$

$$\dddot{\bar D} = ea^2\{(24\omega^3\sin(2\omega t' - \alpha)\cos\alpha\cos\varphi\sin\theta - 24\omega^3\cos(2\omega t' - \alpha)\cos\alpha\sin\varphi\sin\theta)\bar e_x - (24\omega^3\sin(2\omega t' - \alpha)\cos\alpha\sin\varphi\sin\theta + 24\cos(2\omega t' - \alpha)\cdot\cos\alpha\cos\varphi\sin\theta\cdot\omega^3)\bar e_y\} = ea^2\{24\omega^3\cos\alpha\sin\theta\cdot\sin(2\omega t' - \alpha - \varphi)\bar e_x - 24\omega^3\cos\alpha\sin\theta\cos(2\omega t' - \alpha - \varphi)\bar e_y\}$$
$$= 24ea^2\omega^3\cos\alpha\sin\theta\{\bar e_x\sin(2\omega t' - \alpha - \varphi) - \bar e_y\cos(2\omega t' - \alpha - \varphi)\}.$$

$[\dddot{\bar D}\bar n]$ - ?

$$\dddot{\bar D} = \{\sin(2\omega t' - \alpha - \varphi)(\cos\varphi\sin\theta\bar e_r + \cos\varphi\cos\theta\bar e_\theta - \sin\varphi\bar e_\varphi) - \cos(2\omega t' - \alpha - \varphi)(\sin\varphi\sin\theta\bar e_r + \sin\varphi\cos\theta\bar e_\theta + \cos\varphi\bar e_\varphi)\}24\omega^3ea^2\omega^3\cos\alpha\sin\theta$$

$$\dddot{\bar D} = 24\omega^3ea^2\omega^3\cos\alpha\sin\theta\{\sin(2\omega t' - \alpha - 2\varphi)\sin\theta;\ \sin(2\omega t' - \alpha - 2\varphi)\cos\theta;\ -\cos(2\omega t' - \alpha - 2\varphi)\}.$$

$$[\dddot{\bar D}\bar n] = 24\omega^3ea^2\omega^3\cos\alpha\sin\theta[\bar\vartheta\bar n] =$$
$$= 24\omega^3ea^2\cos\alpha\sin\theta\{-\vartheta_\theta\bar e_\varphi + \vartheta_\varphi\bar e_\theta\}$$
$$\Downarrow$$
$$(-\bar e_\varphi\sin(2\omega t' - \alpha - 2\varphi)\cos\theta + \bar e_\theta\cos(2\omega t' - \alpha - 2\varphi))$$

$$dI = \frac{24^2\omega^6e^2a^4\cos^2\alpha\sin^2\theta}{4\pi c^3\cdot 36c^2}\cdot\frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta)\,d\Omega.$$

Т.к. $\alpha = \pi \Rightarrow \cos^2\alpha = 1$.

$$\overline{dJ} = \frac{2e^2a^4\omega^6}{\pi c^5}\sin^2\theta\,(1+\cos^2\theta)\,d\Omega.$$

$$\left\{ \int \sin^2\theta\,(1+\cos^2\theta)\,d\Omega = \int (1-\cos^2\theta)\,d\Omega = \frac{16}{5}\pi. \right.$$

$$\overline{J} = \frac{32}{5}\cdot\frac{e^2a^4\omega^6}{c^5}.$$

Частота излучения 2ω.

4.6. Оценить, при каком угле $\varphi = \pi - \alpha$ инт-сти E1 и E2 излучений в 4.5. будут одинаковы.

Инт-сть E1:

$$\vec d = ea\{\cos\omega t' + \cos(\omega t' - \alpha);\ \sin\omega t' + \sin(\omega t' - \alpha); 0\} =$$

$$= ea\cos\frac{\alpha}{2}\left\{\cos\left(\omega t' - \frac{\alpha}{2}\right);\ \sin\left(\omega t' - \frac{\alpha}{2}\right);\ 0\right\}$$

$$\ddot{\vec d} = -2ea\omega^2\cos\frac{\alpha}{2}\left\{\cos\left(\omega t' - \frac{\alpha}{2}\right);\ \sin\left(\omega t' - \frac{\alpha}{2}\right); 0\right\}$$

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3}[\ddot{\vec d}\vec n]^2$$

$$\overline{[\ddot{\vec d}\vec n]^2} = \overline{\ddot{d}^2} - \overline{(\ddot{\vec d}\vec n)^2} = 4e^2a^2\omega^4\cos^2\frac{\alpha}{2}\Big\{1 -$$

$$\overline{-\left(\cos\left(\omega t' - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\theta\cos\varphi + \sin\left(\omega t' - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\theta\sin\varphi\right)^2}\Big\} =$$

$$= 4e^2a^2\omega^4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) = 4e^2a^2\omega^4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)$$

$$\overline{dJ} = \frac{\omega^4e^2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\pi c^3}(1+\cos^2\theta)$$

$$\overline{J}_d = \frac{8}{3}\frac{\omega^4e^2a^2}{c^3}\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{J}_q = \frac{32}{5}\frac{e^2a^4\omega^6}{c^5}\cos^2\alpha.$$

$$\overline{J}_d = \overline{J}_q \iff \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha} = \frac{12}{5}\cdot\frac{a^2\omega^2}{c^2}.$$

Если $\alpha \to 0$, то $E2 \ll E1$; если $\alpha \to \pi$, то $E1 \ll E2$ (при $\alpha = \pi$ $E1 = 0$.) Поэтому искомый угол близок к π $\Rightarrow \alpha \in \mathrm{II}$, $\frac{\alpha}{2} \in \mathrm{I}$.

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = -\sqrt{\frac{12}{5}}\cdot\frac{a\omega}{c}$$

Если $\alpha = \pi - \varphi$, то $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos(\pi - \varphi)} \approx \dfrac{\sin\frac{\varphi}{2}}{-1} \approx -\dfrac{\varphi}{2} =$

$$= -\sqrt{\frac{12}{5}}\cdot\frac{a\omega}{c}.$$

$$\varphi \sim 2\sqrt{\frac{12}{5}}\,\frac{a\omega}{c}.$$

Эл. диполь $\vec d$ гармонически колеблется вдоль своей оси (оставаясь $\parallel$ самому себе) с a и ω. 4.7.

$$\dot{\vec d} = \ddot{\vec d} = 0,$$

$$\vec A = \frac{1}{c^2R}\frac{\partial}{\partial t'}\int \vec j_{t' + \frac{\vec r\vec n}{c}}(\vec r\vec n)\,dV = \frac{1}{c^2R}\frac{\partial}{\partial t'}\sum_i e_i(\vec n\vec r_i)\vec v_i$$

$$dJ = \frac{1}{4\pi c^3}[\dot{\vec A}\vec n]^2R^2\,d\Omega.$$

Диполь движется как целое, поэтому

$$\vec A = \frac{1}{c^2R}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\sum_i e_i(\vec n\vec r_i)\vec v = \frac{\vec d\vec n}{c^2R}\dot{\vec v},\quad \dot{\vec A} = \frac{\vec d\vec n}{c^2R}\ddot{\vec v},$$

где $\ddot{\vec v} = \{0, 0, \dddot z\}$.

$$dJ = \frac{(\vec d\vec n)^2}{4\pi c^5}\dddot z^2[\vec k\vec n]^2\,d\Omega,$$

$$\overline{\dddot z^2} = a^2\omega^6\overline{\sin^2\omega t'},$$

$$\overline{dJ} = \frac{d^2\omega^6a^2}{4\pi c^5}\cdot\frac{1}{2}(\vec k\vec n)^2[\vec k\vec n]^2\,d\Omega.$$

$[\vec{k}\vec{n}]^2 = 1 - (\vec{k}\vec{n})^2 = 1 - \cos^2\theta.$

$(\vec{d}\vec{n})^2 = d^2(\vec{k}\vec{n})^2 = d^2\cdot\cos^2\theta.$

$$dI = \frac{d^2\omega^6 a^2}{8\pi c^5}\cos^2\theta\,(1-\cos^2\theta)\,d\Omega,$$

$$\left\{ \int(\cos^2\theta - \cos^4\theta)\,d\Omega = \frac{4\pi}{3} - 3\frac{4\pi}{15} = \frac{8}{15}\pi. \right.$$

$$\bar{I} = \frac{d^2\omega^6 a^2}{15c^5}.$$

Энергия, излучаемая за период:

$$\Delta E = \int_0^T I\,dt' = \frac{2d^2\omega^6 a^2}{15c^5}\int_0^T \sin^2\omega t'\,dt' =$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$= \frac{2d^2\omega^6 a^2}{15c^5}\cdot\frac{1}{2}T = \frac{2d^2\omega^5 a^2\pi}{15c^5}.$$

Задание 5. Излучение частиц при столкновении.

5.1. Частица e, m налетает из ∞ на неподвиж. кулоновский центр с q того же знака. Столкновение лобовое, скорость на ∞ v_0. ? полн. эн. излуч. за все $t_{ст}$.

$$\Delta E = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\,dt = \frac{4}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_0^{\infty} w^2\,dt =$$

$w = \frac{eq}{mr^2}$

$$= \frac{4}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_0^{\infty} w\,dv = \frac{4}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_0^{v_0}\frac{eq}{mr^2}\,dv.$$

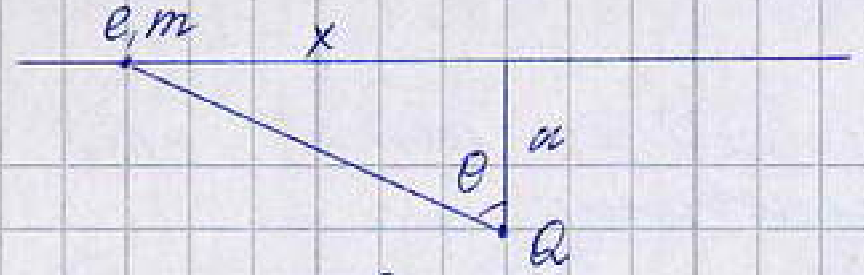
Т.к. $\frac{mv^2}{2} + \frac{eq}{r} = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{m}{2eq}(v_0^2 - v^2).$

$$\Delta E = \frac{em}{3qc^3}\int_0^{v_0}(v_0^2 - v^2)^2\,dv$$

$$\left\{ \int_0^{v_0}(v_0^4 - 2v_0^2 v^2 + v^4)\,dv = v_0^4 v_0 - \frac{2}{3}v_0^2 v_0^3 + \frac{v_0^5}{5} = v_0^5\left(\frac{15-10+3}{15}\right) = \frac{8}{15}v_0^5. \right.$$

$$\Delta E = \frac{8}{45}\cdot\frac{e}{q}\cdot\frac{mv_0^5}{c^3}.$$

5.2 Нерелят. частица e, m рассеивается в кулон. поле ∞ тяжелого силового центра (Q) с прицельным расст. a, обеспечивающим малость отклонения, $mv_0^2 \gg \frac{eQ}{a}$ (периферическое рассеяние). v_0 - скорость на ∞.



Т.к. $F \sim \frac{eQ}{a^2}$, $\Delta t \sim \frac{a}{v}$ $\Rightarrow$ $\frac{eQ}{amv^2} \ll 1$ означает, что $\frac{F}{mv}\Delta t = \frac{dp}{p} \ll 1$.

$w = \frac{eQ}{mr^2}$

$$\Delta E = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\,dt = \frac{2}{3}\frac{e^4Q^2}{m^2c^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{r^4}.$$

Пусть $x = v_0 t$; т.к. $\frac{dp}{p} \ll 1$, то

$dx = v_0\,dt$ $\Rightarrow$

$$\Delta E = \frac{2}{3}\frac{e^4Q^2}{m^2c^3v_0}\int\frac{dx}{r^4} = \frac{2}{3}\frac{e^4Q^2}{m^2c^3v_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{a}{a^4}\cos^2\theta\,d\theta =$$

$$\left\{ x = a\,\mathrm{tg}\,\theta,\quad dx = +a\frac{d\theta}{\cos^2\theta},\quad r = \frac{a}{\cos\theta} \right.$$

$$= \frac{2}{3}\frac{e^4Q^2}{m^2c^3v_0a^3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{e^4Q^2}{3m^2c^3v_0a^3}.$$

5.3. Нерелят. частица e, m движется в одн. постоянном магн. поле $\bar{H}$. Найти время, в течение к-ого энергия частицы уменьшается в 10 раз вслед-е излучения.

$$m\ddot{\bar r} = \frac{e}{c}[\dot{\bar r}\bar H] = \frac{e}{c}\dot r H\sin\theta = \frac{e}{c}\dot r H,$$

$$\mathcal{I} = \frac{2}{3c^3}|\ddot{\bar d}|^2 = \frac{2e^2}{3c^3}|\ddot{\bar r}|^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{e^4H^2\dot r^2}{c^5m^2}$$

$\mathcal{I} = \frac{dW}{dt}$ $\Rightarrow$ $dt = \frac{dW}{\mathcal{I}}$ $\Rightarrow$

$$t = \int_0^t dt = -\frac{1}{\mathcal I}\int_{W_0}^{W_0/n} dW = +\frac{1}{\mathcal I}\cdot\frac{W_0(n-1)}{n} = \frac{3}{2}\frac{c^5m^2}{e^4H^2\dot r^2}\frac{W_0(n-1)}{n} =$$

$$= \frac{3}{4}\frac{c^5m^3}{e^4H^2}\cdot\frac{n-1}{n}.$$

т.к. $W_0 = \frac{m\dot r^2}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{W_0}{\dot r^2} = \frac{m}{2}$.

$$t = \frac{27}{40}\cdot\frac{m^3c^5}{H^2e^4}.$$

а) Оценить число оборотов и время жизни атома в модели Резерфорда, считая $v \ll c$, если радиус орбиты $a = 0.5\cdot10^{-8}$ см, $m = 0.9\cdot10^{-27}$ г, $e = 4.8\cdot10^{-10}$ абс. ед. (5.4.)

Б/считать, что в $\forall$ момент падения на ядро e^- движется по окружности равномерно.

$$\mathcal I = -\frac{d\mathcal E}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2w^2}{c^3} = \frac{2}{3}\frac{e^2\cdot e^4}{c^3m^2r^4}$$

По теореме вириала: $\mathcal E = -\frac{e^2}{2r}$

$$\frac{e^2}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{2e^6}{3m^2c^3}\left(\frac{1}{r}\right)^4,$$

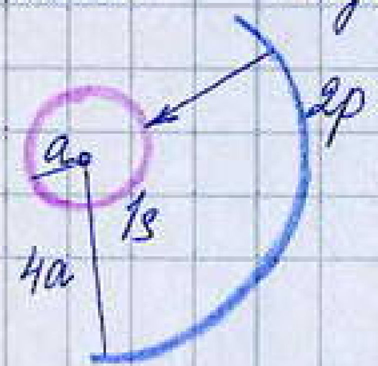
$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{4e^4}{3m^2c^3}\frac{1}{r^4},\quad r^2dr = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}dt,$$

$$\frac{r^3}{3}\Big|_a^0 = -\frac{4e^4}{3m^2c^3}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{4}\frac{m^2c^3a^3}{e^4}.$$

Время жизни $\Delta t = \frac{(0.9)^2 10^{-54}(3)^3 10^{30}(0.5)^3 10^{-24}}{(3)^4\cdot 4\cdot(4.8)^4\cdot 10^{-40}} =$

$= 3.2\cdot10^{-13}$ с.

б) Определить вероятность перехода атома водорода из 2p в 1s.



$$\bar{\mathcal I} = -\frac{d\mathcal E}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2w^2}{c^3} = \frac{2}{3}\frac{e^6}{c^3m^2r^4}.$$

По теореме о вириалах: $\mathcal{E} = -\dfrac{e^2}{2r}$

$$\frac{e^2}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{2}{3}\frac{e^6}{m^2c^3}\left(\frac{1}{r}\right)^4,$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}\frac{1}{r^4},$$

$$\left.\frac{r^3}{3}\right|_{1a}^{4a} = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}\Delta t,$$

$$63a^3 = 4\frac{e^4}{m^2c^3}\Delta t.$$

Вероятность: $W \approx \dfrac{1}{\Delta t} = \dfrac{4}{63}\dfrac{e^4}{m^2c^3a^3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^8 \alpha^4\dfrac{c}{a}$,

$$a = \frac{\hbar^2}{me^2}.$$

Задание 6. Рассеяние эл/м волн. Сила лучистого трения.

6.1 Пренебрегая неодн-стью эл. поля в обл., занятой осциллятором, и действием м. силы — эффектами порядка β, ур-е движения гарм. осц-ра:

$$\ddot{\bar r} + \omega_0^2\bar r = \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\bar r} + \frac{e}{m}\bar E_0 e^{-i\omega t}.$$

Решение: $\bar r = \bar r_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow$

$$-\bar r_0\omega^2 + \omega_0^2\bar r_0 = i\frac{2e^2}{3mc^3}\omega^3\bar r_0 + \frac{e}{m}\bar E_0$$

$$\bar r_0 = \frac{e}{m}\frac{E_0}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\cdot\gamma} = r_0\frac{c^2}{e}\frac{E_0}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma},$$

где $\gamma = \dfrac{2e^2\omega^2}{3mc^3}$, $r_0 = \dfrac{e^2}{mc^2}$.

$$\bar r = \bar r_0\cos\omega t = \tilde r_0\cos\omega t\cdot\bar n',\quad \bar n' = \{0;0;1\}.$$

$$\frac{d\overline{I}}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3}\overline{|e\ddot{\bar r}\times\bar n|^2} = \frac{1}{8\pi c^3}\tilde r_0^2 e^2\omega^4|\bar n'\times\bar n|^2$$

$$[\bar n'\bar n]^2 = 1-(\bar n'\bar n)^2 = 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{S}\frac{d\overline{I}}{d\Omega};\quad \overline{S} = \frac{cE_0^2}{8\pi}$$ — плотность потока, усредн. по t.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{8\pi}{cE_0^2}\cdot\frac{1}{8\pi c^3}r_0^2\frac{c^4}{e^2}e^2\omega^4\frac{E_0^2\sin^2\theta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} =$$

$$= \frac{r_0^2\omega^4\sin^2\theta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}.$$

$$\sigma = \int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \frac{8\pi}{3}\frac{r_0^2\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}.$$

6.2 Пусть $\bar{H} = \{0; 0; H\}$, $\omega_L = \frac{eH}{mc} \ll \omega_0$.

$$m\ddot{\bar{r}} + m\omega_0^2 \bar{r} = \frac{e}{c}[\dot{\bar{r}}\bar{H}].$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eH}{mc}\dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{eH}{mc}\dot{x}, \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

Из 1 и 2: $\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -i\frac{eH}{mc}\dot{\xi}$, $\xi = x + iy$

$$z = z_0 e^{i\omega_0 t}; \quad \xi = \xi_0 e^{i\omega t} \Rightarrow -\omega^2 + \omega_0^2 = \omega_L \omega,$$

$$\omega^2 + \omega_L \omega - \omega_0^2 = 0, \quad \omega = \frac{-\omega_L \pm \sqrt{\omega_L^2 + 4\omega_0^2}}{2} =$$

$$= -\frac{\omega_L}{2} \pm \frac{2\omega_0}{2}\sqrt{1 + \frac{(\omega_L)^2}{4(\omega_0)}} = -\frac{\omega_L}{2} \pm \omega_0\left(1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\omega_L}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Т.к. $\omega_L \ll \omega_0$, то $\omega = \omega_0 \pm \omega_L$

$$\bar{r} = A_1(\bar{e}_x + i\bar{e}_y)e^{i(\omega_0 - \omega_L)t} + A_2(\bar{e}_x - i\bar{e}_y)e^{i(\omega_0 + \omega_L)t}$$

$$+ A_3 \bar{e}_z e^{i\omega_0 t}, \quad A_i - \text{const интегрирование.}$$

Видно, что осц-р в м/поле становится анизотропным, частота его колебаний расщепляется на 3 частоты: ω_0 и $\omega_0 \pm \omega_L$.

Вдоль Oz наблюдаются 2 спектр. линии, поляризов. по кругу в против. стороны. В перпенд. к полю направлении наблюд. все 3 монохром. компоненты, поляризованные линейно. При этом вектор эл. поля несмещенной спектр. линии колебл. в направл. м/поля, вектора же эл./поля у обеих смещ. линий колеблются в перп. направлении.

6.3 Импульс фотона $\bar{p} = \hbar\bar{k} = \frac{\varepsilon}{\omega}\cdot\frac{\omega}{c}\bar{n} = \frac{\varepsilon}{c}\bar{n}$

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{dE}{c\,dt}\bar{n} = \frac{1}{c}J\bar{n}$$

6.5

$$\dot{\bar{M}} = [\bar{r}\bar{f}] = \frac{2e^2}{3c^3}[\bar{r}, \ddot{\bar{v}}]$$

$$\ddot{\bar{v}} = \dot{\bar{w}} = (-\omega^2 R\bar{n})'$$

$$\dot{\bar{M}} = -\frac{2}{3}\frac{e^2\omega^2}{c^3}[\bar{r}, \dot{\bar{r}}] = -\frac{2}{3}\frac{e^2\omega^3}{c^3}R^2.$$

Задание 8. „Преобразования Лоренца"

8.1. П. S' движется отн-но S с произвольно напр. $\bar{V}$.

$$\bar{r}_{\parallel} + \bar{r}_{\perp} = \bar{r}, \quad \bar{r}_{\parallel} = \frac{\bar{V}(\bar{r}\bar{V})}{V^2}, \quad \bar{r}_{\perp} = \frac{\bar{r}V^2 - \bar{V}(\bar{r}\bar{V})}{V^2} = \frac{[\bar{V}[\bar{r}\bar{V}]]}{V^2}$$

$$\bar{r}_{\parallel} = \frac{\bar{r}'_{\parallel} + \bar{V}t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \bar{r}_{\perp} = \bar{r}'_{\perp}$$

$$\bar{r} = \bar{r}_{\parallel} + \bar{r}_{\perp} = \frac{\bar{r}'_{\parallel} + \bar{V}t'}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{[\bar{V}[\bar{r}'\bar{V}]]}{V^2} = \frac{\bar{r}' + \bar{V}t'}{\sqrt{1-\beta^2}} +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\frac{[\bar{V}[\bar{r}'\bar{V}]]}{V^2}.$$

8.2. $\bar{E} = \bar{E}_0 e^{i(\bar{k}\bar{r} - \omega t)}$, $\bar{E} = \bar{E}_0 e^{-i\varphi}$

$$\bar{E}'_{0\parallel} e^{-i\varphi'} = \bar{E}_{0\parallel} e^{-i\varphi}, \quad \varphi' = \varphi \Rightarrow \omega' t' - \bar{k}'\bar{r}' = \omega t - \bar{k}\bar{r}$$

$$k^i x_i = \omega t - \bar{k}\bar{r}, \quad k^i = \left\{\frac{\omega}{c}, \bar{k}\right\}$$

$$k^0 = \frac{\omega}{c}, \quad k^1 = \frac{\omega}{c}\cos\theta, \quad k^2 = \frac{\omega}{c}\sin\theta$$

$$(k^0)' = \frac{k^0 - \beta k^1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\frac{\omega}{c} - \beta\frac{\omega}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{\omega}{c},$$

$$(k^1)' = \frac{k^1 - \beta k^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\cos\theta - \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{\omega}{c},$$

$$(k^2)' = k^2 = \frac{\omega}{c}\sin\theta; \quad (k^3)' = k^3.$$

$$(*)\ \omega' = \frac{\omega(1-\beta\cos\theta)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \omega'\cos\theta' = \frac{\omega(\cos\theta - \beta)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\omega'\sin\theta' = \omega\cdot\sin\theta.$$

$$(*) \Rightarrow \frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}$$

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta}, \quad \sin\theta' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\cdot\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}.$$

Аберрация – явление отклонение света при переходе к другой системе отсч. 8.3

П. в S: $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta$
в S': $v'_x = v'\cos\theta'$, $v'_y = v'\sin\theta'$.

$$\text{Т. к.} \quad v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} = \frac{v'\cos\theta' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}\cos\theta'} = v\cos\theta,$$

$$v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} = \frac{v'\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v'V}{c^2}\cos\theta'} = v\sin\theta,$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{v'\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{v'\cos\theta' + V}}$$

определяет изменение напр-я скорости при переходе от S к S'.

В нашем случае $v = v' = c$, тогда

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta + \cos\theta'}\sin\theta'.}$$

Если $V \ll c$, то $\sin\theta - \sin\theta' = -\beta\sin\theta'\cos\theta'$

$$v_x = c\cos\theta \quad v_y = c\cdot\sin\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'},$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\cdot\sin\theta'}{1+\beta\cos\theta'};$$

$$\sin\theta \approx \sin\theta'(1 - \beta\cos\theta'), \quad \sin\theta - \sin\theta' = -\beta\sin\theta'\cos\theta'.$$

Угол аберрации: $\Delta\theta = \theta' - \theta$

$$2\sin\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta' + \theta}{2}\right) = \beta\cos\theta'\sin\theta'$$

$$\boxed{\Delta\theta = \beta\sin\theta'.}$$

8.5 ω' - частота фотона, измеренная в СО, движущейся вместе с атомом со скор. $\overline{V}$.

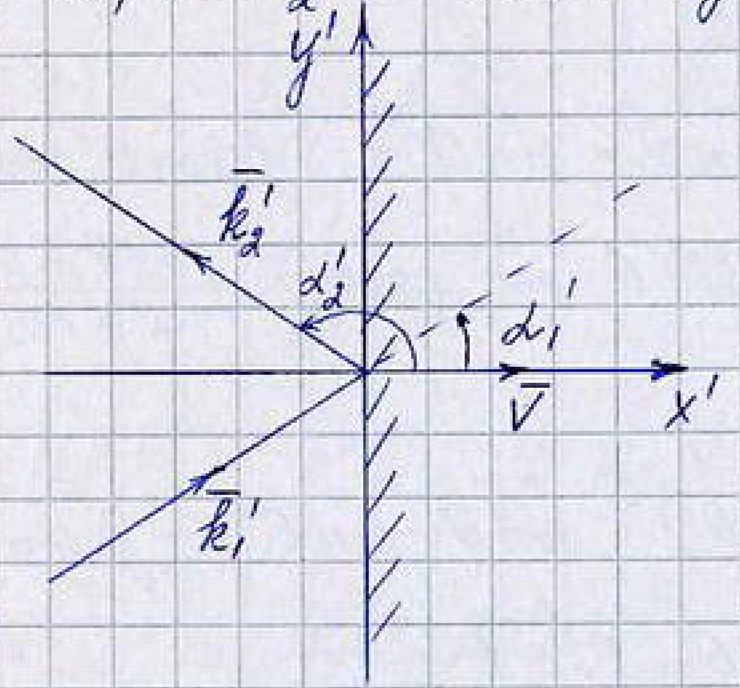
$$\omega = \frac{\omega'(1+\beta\cos\theta')}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$|\cos\theta'| \le 1$, поэтому

$$\frac{\omega'(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \le \omega \le \frac{\omega'(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ или иначе}$$

$$\omega'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \le \omega \le \omega'\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

8.6 П. S' связана с зеркалом: ω_1' и ω_2' - част. до и после отраж.



В S' выполняется:

$$\omega_1' = \omega_2' = \omega',$$

$$\alpha_2' = \pi - \alpha_1' \Rightarrow$$

$$\cos\alpha_2' = -\cos\alpha_1'.$$

$$k^i = \left\{\frac{\omega}{c}, \overline{k}\right\}; \quad \overline{V} \parallel Ox' \Rightarrow k'_{x_1} = k'_1\cos\alpha_1'$$

$$k'_{x_2} = k'_2\cos\alpha_2'$$

Т.к. $\omega = \dfrac{\omega'(1+\cos\alpha')}{\sqrt{1-\beta^2}}$, то

$$\omega_1 = \frac{\omega'(1+\cos\alpha_1')}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1), \qquad \omega_2 = \frac{\omega'(1+\cos\alpha_2')}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2)$$

Т.к. $\cos\alpha = \dfrac{\cos\alpha' + \beta}{1+\beta\cos\alpha'}$, то

$$\cos\alpha_1 = \frac{\cos\alpha_1' + \beta}{1+\beta\cos\alpha_1'} \quad (3) \qquad \text{и} \qquad \cos\alpha_2 = \frac{\cos\alpha_2' + \beta}{1+\beta\cos\alpha_2'}. \quad (4)$$

(1)-(2): $$\omega_2 = \omega_1\frac{1+\beta\cos\alpha_2'}{1+\beta\cos\alpha_1'} = \omega_1\frac{1-\beta\cos\alpha_1'}{1+\beta\cos\alpha_1'} =$$

$$= \omega_1\frac{1-\beta\dfrac{\cos\alpha_1-\beta}{1-\beta\cos\alpha_1}}{1+\beta\dfrac{\cos\alpha_1-\beta}{1-\beta\cos\alpha_1}} = \omega_1\frac{1-\beta\cos\alpha_1-\beta\cos\alpha_1+\beta^2}{1-\beta\cos\alpha_1+\beta\cos\alpha_1-\beta^2},$$

$$\boxed{\omega_2 = \omega_1\frac{1-2\beta\cos\alpha_1+\beta^2}{1-\beta^2}}.$$

(4): $$\cos\alpha_2 = \frac{\beta-\cos\alpha_1'}{1-\beta\cos\alpha_1'} = \frac{\beta-\dfrac{\cos\alpha_1-\beta}{1-\beta\cos\alpha_1}}{1-\beta\dfrac{\cos\alpha_1-\beta}{1-\beta\cos\alpha_1}} =$$

$$= \frac{\beta-\beta^2\cos\alpha_1-\cos\alpha_1+\beta}{1-\beta\cos\alpha_1-\beta\cos\alpha_1+\beta^2} = \frac{2\beta-(1+\beta^2)\cos\alpha_1}{1-2\beta\cos\alpha_1+\beta^2}.$$

$$\boxed{\cos\alpha_2 = \frac{2\beta-(1+\beta^2)\cos\alpha_1}{1-2\beta\cos\alpha_1+\beta^2}}$$

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}, \quad \lambda = \frac{\lambda'(1-\beta\cos\theta)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$ 8.7

$$\boxed{\lambda' = \lambda\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}}.$$

сл. продольный Доплер-эффект:

а) приближение $(\cos\theta = 1) \Rightarrow \lambda = \lambda'\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$,

б) удаление $(\cos\theta = -1) \Rightarrow \lambda = \lambda'\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$,

где λ регистрир. наблюдателем.

8.8 Точечный заряд e движется с пост. V.

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e}{R'\sqrt{1-\beta^2}}.$$

R': $x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $y' = y$, $z' = z$,

$$R'^2 = \frac{(x-Vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$$

Пусть $R^* = \sqrt{1-\beta^2}\cdot R'$, тогда

$$\boxed{\varphi = \frac{e}{\sqrt{(x-Vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}} = \frac{e}{R^*}. \qquad \bar{A} = \frac{e\bar{V}}{cR^*}}$$

В отсутствие м/поля:

$$E_x = E_x' = \frac{ex'}{R'^3}; \quad E_y = \frac{E_y'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ey'}{R'^3\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$E_z = \frac{E_z'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ez'}{R'^3\sqrt{1-\beta^2}}.$$ Тогда:

$$\bar{E} = \bar{E}_x + \bar{E}_y + \bar{E}_z = \frac{e}{R'^3}\left(\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\bar{i} + \frac{y\bar{j}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{z\bar{k}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) =$$

$$= \frac{e}{R'^3\sqrt{1-\beta^2}}\left((x-Vt)\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right) = (1-\beta^2)\frac{e\bar{R}}{R^{*3}},$$

где $\bar{R} = (x-Vt)\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

Аналогично для $\bar{H}$ в отсут. эл/поля:

$$\bar{H} = \frac{1}{c}[\bar{V}\bar{E}].$$

Если $\theta = (\bar{R}, \bar{V})$, то $\bar{E} = \dfrac{e\bar{R}(1-\beta^2)}{R^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$

8.9 Точечный диполь $\bar{d}$ движется поступательно с пост. $\bar{V}$.

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\bar{d}\cdot\bar{R}'}{R'^3\sqrt{1-\beta^2}},$$ где, как и прежде,

$$\bar{R}' = \{x', y', z'\} = \left\{\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, y, z\right\}.$$

Тогда, если $\bar{R}^* = \{x - Vt, \sqrt{1-\beta^2}\,y, \sqrt{1-\beta^2}\,z\}$,

то $$\boxed{\varphi = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\,\bar{d}\cdot\bar{R}^*}{R^{*3}}. \qquad \bar{A} = \frac{\bar{V}}{c}\varphi.}$$

8.5a Максим. изменение частоты б/ для источников, лежащих в плоскости орбиты ⊕.

$$\delta\omega = 2\omega\beta\gamma$$

Из-за суточного вращ. ⊕:

$V_{орб} + \Omega R$, где $V_{орб}$ = орбит. ск. ⊕,

Ω - угл. скорость вращения.

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = 2\gamma\cdot\frac{V_{орб} + \Omega R}{c}$$

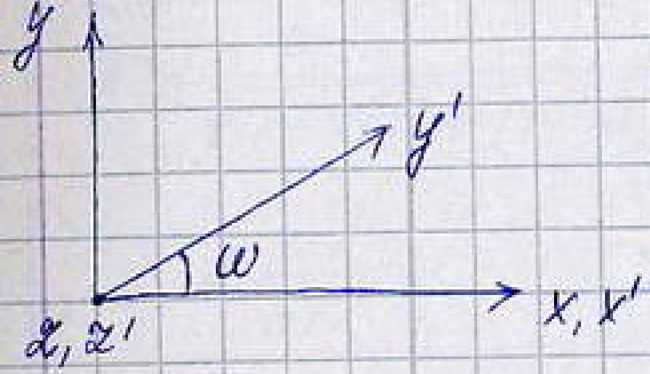
Задание 9. „Тензорная алгебра. Тензор электромагнитного поля"

$$ds^2 = g_{00}(dq^0)^2 - g_{11}(dq^1)^2 - g_{22}(dq^2)^2 - g_{33}(dq^3)^2$$

$$ds^2 = g_{ik}\,dq^i dq_k$$

В косоугольной системе $Ox'_1 y'_1 z'$

$$ds^2 = g_{00}(dq^0)^2 - h_1^2(dq^1)^2 - h_2^2(dq^2)^2 - h_3^2(dq^3)^2.$$



$x' = x,$

$y' = \dfrac{y}{\sin\omega},$

$z' = z.$

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2 + \underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial y}{\partial x'}\right)^2}}_{0} + \underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial z}{\partial x'}\right)^2}}_{0} = 1,$$

$$h_2^2 = \underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial x}{\partial y'}\right)^2}}_{0} + \left(\frac{\partial y}{\partial y'}\right)^2 + \underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial z}{\partial y'}\right)^2}}_{0} = \sin^2\omega$$

$$h_3^2 = 1.$$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -h_1^2 & & \\ & & -h_2^2 & \\ 0 & & & -h_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -\sin^2\omega & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix},$$

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1/h_1^2 & & \\ & & -1/h_2^2 & \\ 0 & & & -1/h_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1/\sin^2\omega & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A_{00} = A_0{}^0 = A^{00}, \quad A_{01} = -A_0{}^1 = -A^{01}, \quad A_{11} = A^{11},$$

$$A_{22} = -\sin^2\omega \cdot A_2{}^2 = \sin^4\omega\, A^{22}, \quad A_{33} = A^{33}.$$

Аналогично 9.1, только коэф. Ламе для ССК. 9.2

$h_1^2 = 1, \quad h_2^2 = \rho^2, \quad h_3^2 = \rho^2\sin^2\theta.$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -\rho^2 & \\ 0 & & & -\rho^2\sin^2\theta \end{pmatrix},$$

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -\frac{1}{\rho^2} & \\ 0 & & & -\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}.$$

9.3

$$F_{ik} \equiv \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$F^{ik} \equiv \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

9.4

$$E'_x = F'_{01} = (\alpha_0{}^0\alpha_1{}^1 - \alpha_0{}^1\alpha_1{}^0)F_{01} = F_{01} = E_x,$$

$$E'_y = F'_{02} = \alpha_0{}^0\alpha_2{}^2 F_{02} + \alpha_0{}^1\alpha_2{}^2 F_{12} = \frac{F_{02}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}F_{12} = \frac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$E'_z = F'_{03} = \alpha_0{}^0\alpha_3{}^3 F_{03} + \alpha_0{}^1\alpha_3{}^3 F_{13} = \frac{F_{03}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta F_{13}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Аналогично, $H_x' = H_x$,

$$H_y' = \frac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad H_z' = \frac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Пусть $\bar V$ произвольно направлена, тогда:

$\bar E = \bar E_{\parallel} + \bar E_{\perp}$, $\bar H = \bar H_{\parallel} + \bar H_{\perp}$, причем.

$$\bar E_{\parallel}' = \bar E_{\parallel}, \quad \bar E_{\perp}' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{\bar E_{\perp} + [\bar\beta \bar H]\right\}$$

$$\bar H_{\parallel}' = \bar H_{\parallel}, \quad \bar H_{\perp}' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{\bar H_{\perp} - [\bar\beta \bar E]\right\}$$

$$\bar E = \bar E_{\perp} + \bar E_{\parallel} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{\bar E_{\perp}' - [\bar\beta \bar H']\right\} + \bar E_{\parallel}' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left\{\bar E' - [\bar\beta \bar H']\right\} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\bar E_{\parallel}' =$$

$$= \gamma\left\{\bar E' - [\bar\beta \bar H']\right\} + (1-\gamma)\frac{\bar V(\bar V \bar E')}{V^2}.$$

$$\bar H = \bar H_{\perp} + \bar H_{\parallel} = \gamma\left\{\bar H_{\perp}' + [\bar\beta \bar E']\right\} + \bar H_{\parallel}' =$$

$$= \gamma\left\{\bar H' + [\bar\beta \bar E']\right\} + (1-\gamma)\frac{\bar V(\bar V \bar H')}{V^2}.$$

Задача имеет ∞ мн-во решений. Если найдена S' (движ. с $\bar V$), в к-ой $\bar E' \parallel \bar H'$, то в $\forall$ другой СО, движ. отн-но S' вдоль этого общего направления, $\bar E$ и $\bar H$ б/параллельны.

Б/искать в связи с этим т/о ту СО, S', к-ая движется $\perp$ плоск. $(\bar E, \bar H)$.

Т.к. $\bar E' \times \bar H' = 0$ (усл. паралл-сти), то

$$\frac{\bar V}{c} = \bar E \times \bar H \; \frac{E^2 + H^2 - \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(\bar E \bar H)^2}}{2(\bar E \times \bar H)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V}{c} = EH \sin\varphi \cdot \frac{E^2 + H^2 - \sqrt{(E^2-H^2)^2 + 4E^2H^2\cos^2\varphi}}{2E^2H^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{E^2 + H^2 - \sqrt{E^4 - 2E^2H^2 + H^4 + 4E^2H^2\cos^2\varphi}}{2EH\sin\varphi} =$$

$$= \frac{E^2 + H^2 - \sqrt{E^4 + H^4 + \cos\frac{\varphi}{2}}}{2EH\sin\varphi}.$$

9.8.

$$F^{ik}F_{ik} = -E_x \cdot E_x + (-E_y)\cdot E_y + (-E_z)E_z + E_x(-E_x) +$$
$$+ H_z^2 + H_y^2 + E_y(-E_y) + H_z^2 + H_x^2 + E_z(-E_z) +$$
$$+ H_y^2 + H_x^2 = 2(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) - 2(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) =$$
$$= 2\bar H^2 - 2\bar E^2.$$

Аналогично: $(F^{ik})' F_{ik}' = 2\bar H'^2 - 2\bar E'^2$

$$\Rightarrow \boxed{H^2 - E^2 = inv.}$$

9.10

$\bar E = \bar E_0 e^{i\alpha}$, $\bar H = \bar H_0 e^{i\alpha}$

$\bar E' = \bar E_0' e^{i\alpha'} = \bar E_0' e^{i\alpha}$, $\bar H = \bar H_0 e^{i\alpha'} = \bar H_0 e^{i\alpha}$.

Т. обр. преобраз. т/о амплитуды.

Задание 10. „Законы сохранения".

(10.1)

$$N\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{N} \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mc}{N}.$$

m_1, v_1 поглощается $m_2, v_2 = 0$. ? M, V. (10.2.)

Зн сохр: $p_1^i + p_2^i = p^i$,

$p_1^i = \left\{\frac{\mathcal{E}_1}{c}, \bar{p}_1\right\}$, $p_2^i = \left\{m_2^2 c^2, 0\right\}$, $\mathcal{E}_1 = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

До реакции — вектор полного 4-имп.

$p^i\left\{\frac{\mathcal{E}_1}{c} + m_2 c, \bar{p}_1\right\}$; после — $\left\{M^2c^2, 0\right\}$ в сист. ц. масс

Тогда: $M^2c^2 = \frac{\mathcal{E}_1^2}{c^2} + 2\frac{\mathcal{E}_1}{c}m_2 c + m_2^2c^2 - p_1^2 =$

$= m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + \frac{2m_1m_2}{\sqrt{1-\beta^2}}c^2$, $(M > m_1 + m_2)$

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{m_1 m_2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

$$\bar{V} = \frac{c^2 \bar{p}_1}{\mathcal{E}_1 + m_2 c^2} = \frac{\frac{m_1 \bar{v}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\frac{m_1}{\sqrt{1-\beta^2}} + m_2} = \frac{m_1 \bar{v}_1}{m_1 + m_2\sqrt{1-\beta^2}}.$$

10.3 Эн. возбужд. $\mathcal{E} = \hbar\omega_0$. Найти ω гамма кванта с учетом отд. ядра. $Mc^2 \gg \hbar\omega_0$.

Зн-г сохр: $\mathcal{E} = \hbar\omega + T_я$, $\bar{0} = \frac{\overline{\hbar\omega}}{c} + \bar{p}_я$,

$$T_я = \frac{p_я^2}{2M} = \frac{(\hbar\omega)^2}{2Mc^2}; \quad \mathcal{E} = \hbar\omega + \frac{1}{2Mc^2}(\hbar\omega)^2.$$

$$\hbar\omega = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\mathcal{E}/2Mc^2}}{1/2Mc^2} = -2Mc^2 + 2Mc^2\left(1 + \frac{\mathcal{E}}{2Mc^2} - \frac{\mathcal{E}^2}{4(Mc^2)^2}\right) = \mathcal{E}\left(1 - \frac{\mathcal{E}}{2Mc^2}\right)$$

$$\omega = \frac{\mathcal{E}}{\hbar}\left(1 - \frac{\mathcal{E}}{2Mc^2}\right)$$

10.4 Квант света ω_0 рассеив. на покоящ. e^-? $\omega = \omega(\theta)$.

$$\begin{cases} \hbar\omega_0 + m_e c^2 = \hbar\omega + \sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4}, \\ \hbar\frac{\bar{\omega}_0}{c} = \frac{\overline{\hbar\omega}}{c} + \bar{p}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\hbar\omega_0 + m_e c^2 - \hbar\omega)^2 = p^2c^2 + m_e^2c^4, \\ \left(\frac{\overline{\hbar\omega_0}}{c} - \frac{\overline{\hbar\omega}}{c}\right)^2 c^2 = \bar{p}^2c^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hbar^2\omega_0^2 - 2\hbar^2\omega\omega_0 + \hbar^2\omega^2 + 2\hbar(\omega_0 - \omega)m_e c^2 + m_e^2c^4 = p^2c^2 + m_e^2c^4, \\ \hbar^2\omega_0^2 - 2\hbar^2\omega_0\omega\cos\theta + \hbar^2\omega^2 = p^2c^2; \end{cases}$$

$$2\hbar(\omega_0 - \omega)m_e c^2 - 2\hbar^2\omega_0\omega(1 - \cos\theta) = 0,$$

$$\boxed{\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0\omega} = \frac{\hbar}{m_e c^2}(1 - \cos\theta).}$$

10.6.

До: $\left\{\frac{\mathcal{E}_1}{c} + m_2 c, \ \bar{p}_1\right\}$

После: $\{Mc, 0\}$ ⇒

$$M^2c^2 = \frac{\mathcal{E}_1^2}{c^2} + 2m_2\mathcal{E}_1 + m_2^2c^2 - \bar{p}_1^2 = m_1^2c^2 + 2m_1\mathcal{E}_1 + m_2^2c^2.$$

$$T = \mathcal{E}_1 - m_1c^2 = \left(\frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_2} - m_1\right)c^2 = \frac{M^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2}c^2.$$

$$T = \frac{(M + m_1 + m_2)(M - m_1 - m_2)}{2m_2}c^2.$$

10.7

$n + \gamma \to n + \pi^0$.

Для γ: $p = \frac{T_{пор}}{c}$,

$$(T_{пор} + Mc^2)^2 - T_{пор}^2 = (Mc^2 + mc^2)^2,$$

$$2Mc^2T_{пор} + M^2c^4 = M^2c^4 + 2Mmc^4 + m^2c^4,$$

$$\boxed{T_{пор} = \frac{(2Mm + m^2)c^2}{2M}.}$$

10.8

До: $\left\{\frac{\mathcal{E}_1}{c} + m_1c; \ \bar{p}_1\right\}$

После: $\left\{\frac{\mathcal{E}'}{c}; 0\right\}$.

$$\left(\frac{\mathcal{E}_1}{c} + m_1c\right)^2 - p_1^2 = \left(\frac{\mathcal{E}'}{c}\right)^2,$$

$$\frac{\mathcal{E}_1^2}{c^2} + 2\mathcal{E}_1m_1 + m_1^2c^2 - p_1^2 = \frac{\mathcal{E}'^2}{c^2},$$

$$\mathcal{E}' = T' + 2m_1c^2,$$

$$(T' + 2m_1c^2)^2 = 2\mathcal{E}_1m_1c^2 + 2m_1^2c^4,$$

$$T' = \sqrt{2\mathcal{E}_1m_1c^2 + 2m_1^2c^4} - 2m_1c^2.$$

10.9a
$$\begin{cases} \hbar\omega = +\sqrt{m_\pi^2 c^4 + p^2 c^2}, \\ \frac{\hbar\omega}{c} = \bar{p}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hbar^2\omega^2 = m_\pi^2 c^4 + p^2c^2; \\ \hbar^2\omega^2 = p^2c^2. \end{cases} \Rightarrow \quad m_\pi = 0 \varnothing.$$

10.9
$$\begin{cases} \sqrt{m_e^2c^4 + p^2c^2} = \hbar\omega + \sqrt{m_e^2c^4 + p'^2c^2}, \\ \bar{p} = \frac{\hbar\bar{\omega}}{c} + \bar{p}'; \end{cases}$$

$$m_e^2c^4 + p^2c^2 = \hbar^2\omega^2 + 2\hbar\omega\sqrt{m_e^2c^4 + p'^2c^2} + m_e^2c^4 + p'^2c^2;$$

$$c^2p^2 = \hbar^2\omega^2 + 2(\hbar\bar{\omega}\bar{p}')\cdot c^2 + p'^2c^2;$$

$$\Rightarrow \quad 2(\hbar\bar{\omega}\cdot\bar{p}') = 2\hbar\omega\sqrt{m_e^2c^4 + p'^2c^2} \qquad \varnothing.$$

10.10
$$\pi \longrightarrow \gamma + \gamma.$$

$$p_\pi^i = \left\{\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}; \frac{m\bar{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\}, \quad p_{\gamma_1}^i = \left\{\frac{\hbar\omega_1}{c}, \hbar k_1\right\};$$

$$p_\pi^i = p_{\gamma_1}^i + p_{\gamma_2}^i \Rightarrow p_\pi^i p_{\pi i} - 2p_\pi^i p_{\gamma_1 i} + p_{\gamma_1}^i p_{\gamma_1 i} = p_{\gamma_2}^i p_{\gamma_2 i},$$

$$m_\pi^2c^2 - 2(m\gamma\hbar\omega_1 - m\gamma\hbar v k_1\cos\theta_1) + 0 = 0.$$

$$m_\pi^2c^2 - 2m\gamma\hbar\omega_1(1-\beta\cos\theta_1) = 0. \Rightarrow$$

$$\omega_1(\theta_1) = \frac{m_\pi c^2}{2\gamma\hbar(1-\beta\cos\theta_1)},$$

Аналогично: $\omega_2(\theta_2) = \dfrac{m_\pi c^2}{2\gamma\hbar(1-\beta\cos_2\theta)}$.

Задание 11. „Движение заряженных частиц в полях. Интегралы движения. Ур-я движения в форме Лагранжа".

При $t=0$: $\bar{p}_0 \perp \bar{E}$, т.е. $p_x = 0, p_y = p_0, p_z = 0$, 11.1.
$\bar{E} \parallel Ox$; $x = 0$.

Ур. движ.:
$$\frac{dp_x}{dt} = eE_x,$$
$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{dp_z}{dt} = 0,$$
$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\cdot E_x\cdot v_x = eE_x\frac{dx}{dt};$$

$$p_x = eE_xt, \quad p_y = p_0, \quad p_z = 0; \quad \mathcal{E} = eE_x\cdot x + \mathcal{E}_0;$$

С др. стор., $\mathcal{E} = \sqrt{(p_x^2+p_y^2+p_z^2)c^2 + m^2c^4} =$
$$= \sqrt{[(eE_xt)^2 + p_0^2]c^2 + m^2c^4} = \sqrt{(ecE_xt)^2 + \mathcal{E}_0^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{(ecE_xt)^2 + \mathcal{E}_0^2} = eE_x\cdot x + \mathcal{E}_0. \Rightarrow t = \frac{\sqrt{(eE_x x + \mathcal{E}_0)^2 - \mathcal{E}_0^2}}{ecE_x}.$$

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{mv_x}{\sqrt{1-\beta^2}} : \frac{mv_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{v_x}{v_y} = \frac{dx}{dy},$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{eE_xt}{p_0} = \frac{\sqrt{(eE_x\cdot x + \mathcal{E}_0)^2 - \mathcal{E}_0^2}}{cp_0}.$$

$$\frac{y}{cp_0} = \int\frac{dx}{\sqrt{(eE_xx+\mathcal{E}_0)^2 - \mathcal{E}_0^2}} = \frac{1}{eE_x}\,\mathrm{arch}\,\frac{eE_x x}{\mathcal{E}_0}, \text{ или}$$

$$\boxed{x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE_x}\,\mathrm{ch}\,\frac{eE_x y}{cp_0}}$$

$\bar{H}$ – однород.; $\bar{H} \parallel Oz$. 11.2

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{e}{c}v_yH, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{e}{c}v_xH, \quad \frac{dp_z}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0.$$

$\Rightarrow \mathcal{E} = const = \mathcal{E}_0.$

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathcal{E}}{c^2} v_x\right) = \frac{\mathcal{E}_0}{c^2}\frac{dv_x}{dt}\ ; \quad \frac{dp_y}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{c^2}\frac{dv_y}{dt}.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{v_y}\frac{dv_x}{dt} &= \frac{ecH}{\mathcal{E}_0}, \\ \frac{1}{v_x}\frac{dv_y}{dt} &= -\frac{ecH}{\mathcal{E}_0}, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} v_x &= a\cos(\omega t + \alpha), \\ v_y &= -a\sin(\omega t + \alpha), \end{aligned}$$

где $\omega = \dfrac{ecH}{\mathcal{E}_0}$.

$$v_x^2 + v_y^2 = v_{\perp 0}^2 = const.$$

$$x = x_0 + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t + \alpha)\ ; \quad y = y_0 + \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t + \alpha);$$

$z = z_0 + (v_z)_0 t = z_0$, $\overset{\text{если}}{\text{т.к.}}$ $(v_z)_0 = 0 \Rightarrow$

траектория — окружность в (xy) с рад.

$$R = \frac{v_{\perp 0}}{\omega} = \frac{v_{\perp 0}\mathcal{E}_0}{ecH} = \frac{cp_0}{eH}.$$

11.3. $\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - e\varphi(\bar r, t) + e(\bar v \cdot \bar A(\bar r, t))/c$,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \frac{m\bar v}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e}{c}\bar A = \bar p + \frac{e}{c}\bar A,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{e}{c}\,grad(\bar A \bar v) - e\,grad\,\varphi.$$

Ур. движения:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\bar v}{\sqrt{1-\beta^2}} = e\,grad\left\{\frac{(\bar A \bar v)}{c} - \varphi\right\} - \frac{e}{c}\frac{d\bar A}{dt}.$$

ЦСК: r, α, z. Движение происх. в пл. $z=0$, 11.4
r – расст. м/у e и q.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m\dot r}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \dfrac{m r \dot\alpha^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \dfrac{qe}{r^2}, & (1) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m r^2 \dot\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 0. & (2) \end{cases}$$

(2) $\dfrac{m r^2 \dot\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} = K = const$ (мом. имп.).

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{qe}{r} = \mathcal{E} = const \text{ (полн. эн. сист.)}$$

Задание 13. „Тензор энергии-импульса. Излучение быстро движущихся зарядов."

13.1 $-\frac{d^2\mathcal{E}}{dt'\,d\Omega} = \frac{dI}{d\Omega}(1-\bar\beta\bar n) = \frac{e^2}{4\pi c^3}\bar E^2(1-\bar\beta\bar n);$

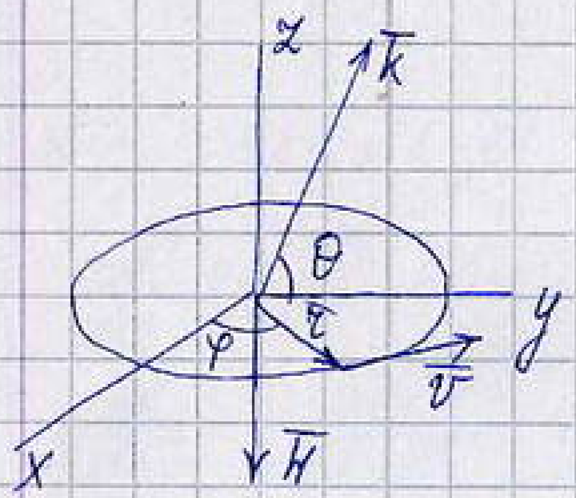
а) $-\frac{d^2\mathcal{E}}{dt'\,d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{[\bar n[(\bar n-\bar\beta)\dot{\bar w}]]^2}{(1-\bar\beta\bar n)^5}.$

б) $-\frac{d^2\mathcal{E}}{dt'\,d\Omega} = \frac{2}{3}\frac{e^4}{c^3m^2}\left\{\frac{(\bar E+[\bar\beta\bar H])^2-(\bar\beta\bar E)^2}{1-\beta^2}\right\}(1-\bar\beta\bar n).$

13.2 Радиус орбиты: $r = \frac{mcv}{eH\sqrt{1-\beta^2}}$,

цикл. частота: $\omega_H = \frac{v}{r} = \frac{eH}{mc}\sqrt{1-\beta^2}.$

$$-\frac{d^2\mathcal{E}}{dt'\,d\Omega} = \frac{e^4H^2v^2}{8\pi^2m^2c^5}(1-\beta^2)\left\{\frac{(1-\beta^2)\sin^2\theta+(\beta-\cos\theta\cos\varphi)^2}{(1-\beta\cos\theta\cos\varphi)^5}\right\}\cdot\omega_H.$$



$\varphi = \omega_H t.$