в) $\operatorname{rot}(\bar r\,\varphi(r)) = [\nabla(\overset{\downarrow}{\bar r}\,\varphi(r))] + [\nabla(\bar r\,\overset{\downarrow}{\varphi}(r))] =$

$= [\nabla\bar r\cdot\varphi(r)] + [\nabla\varphi(r),\bar r] = \varphi(r)\,\cancelto{0}{\operatorname{rot}\bar r} +$

$+ [\cancelto{0}{\tfrac{\bar r}{r}\varphi'(r),\bar r}] = 0.$

г) $\operatorname{grad}(\bar E\bar r) = \nabla(\overset{\downarrow}{\bar E}\bar r) + \nabla(\bar E\overset{\downarrow}{\bar r}) = [\bar r\,\cancelto{0}{\operatorname{rot}\bar E}] +$

$+ (\bar r\nabla)\bar E + [\bar E\,\cancelto{0}{\operatorname{rot}\overset{\downarrow}{\bar r}}] + (\bar E\nabla)\overset{\downarrow}{\bar r} = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot$

$\bar E = const$ $\left(E_x\vec i + E_y\vec j + E_z\vec k\right) + \left(E_x\frac{\partial}{\partial x} + E_y\frac{\partial}{\partial y} + E_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot$

$\cdot\left(x\vec i + y\vec j + z\vec k\right) = \vec E.$

д) $(\bar E\nabla)\bar r = \bar E.$

е) $\operatorname{div}(\bar H\times\bar r) = (\nabla[\overset{\downarrow}{\bar H}\bar r]) + (\nabla[\bar H\overset{\downarrow}{\bar r}]) =$

$= \bar r\,\cancelto{0}{\operatorname{rot}\bar H} - \bar H\,\cancelto{0}{\operatorname{rot}\bar r} = 0.$

ж) $\operatorname{rot}(\bar H\times\bar r) = [\nabla[\overset{\downarrow}{\bar H}\bar r]] + [\nabla[\bar H\overset{\downarrow}{\bar r}]] =$

$= \overset{\downarrow}{\bar H}(\cancelto{0}{\nabla\bar r}) - \bar r(\cancelto{0}{\nabla\overset{\downarrow}{\bar H}}) + \bar H(\nabla\overset{\downarrow}{\bar r}) - (\bar H\nabla)\bar r = \bar H\operatorname{div}\bar r -$

$(\bar H\nabla)\bar r = 3\bar H - \bar H = 2\bar H.$

з) $\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}f(t-\frac{r}{c})\right) = \frac{1}{r}\operatorname{grad}f(t-\frac{r}{c}) + f(t-\frac{r}{c})\cdot$

$\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r} = \frac{1}{r}f'(t-\frac{r}{c})\cdot(-\frac{1}{c})\operatorname{grad}r - f(t-\frac{r}{c})\cdot$

$\cdot\frac{\bar r}{r^3} = -\frac{\bar r}{r^2c}f'(t-\frac{r}{c}) - \frac{\bar r}{r^3}f(t-\frac{r}{c}).$

1.3

Коэффициенты Ламе: $h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$

ПСК → ЦСК : $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$

$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1.$

$h_\varphi = \sqrt{r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi} = r,\quad h_z = 1.$

ПСК → ССК : $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,$
$z = r\cos\theta.$

$h_r = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1,$

$h_\varphi = \sqrt{r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi} = r\sin\theta,$

$h_\theta = \sqrt{r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta} = r$

ЦСК

$\operatorname{grad}\psi = \vec e_r\frac{1}{h_r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \vec e_\varphi\frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \vec e_z\frac{1}{h_z}\frac{\partial\psi}{\partial z} =$

$= \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\vec e_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\vec e_z.$

$\operatorname{div}\vec B = \frac{1}{h_r h_\varphi h_z}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(h_\varphi h_z B_r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(h_r h_z B_\varphi) +\right.$

$\left.+ \frac{\partial}{\partial z}(h_r h_\varphi B_z)\right\} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(B_\varphi) +\right.$

$\left.+ \frac{\partial}{\partial z}(rB_z)\right\} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}.$

$\operatorname{rot}\vec A = \frac{1}{h_r h_\varphi h_z}\cdot\begin{vmatrix} h_r\vec e_r & h_\varphi\vec e_\varphi & h_z\vec e_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_r A_r & h_\varphi A_\varphi & h_z A_z \end{vmatrix} =$

$$= \frac{1}{r}\left\{\vec{e}_r\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - r\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) r + \vec{e}_z\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\right\} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z.$$

ССК

$$\operatorname{grad}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\vec{e}_\theta.$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\, B_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(rB_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta\, B_\theta)\right\} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 B_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\cdot B_\theta).$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta\cdot A_\varphi)\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\right) r\sin\theta\cdot\vec{e}_\varphi + \left(\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot\sin\theta\cdot A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\cdot r\vec{e}_\theta\right\} = \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\sin\theta\cdot A_\varphi)}{\partial \theta}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\theta.$$

1.4.

$\Delta\Psi = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\operatorname{grad}\Psi = 0.$

Из 1.3. используем ф-лы для $\operatorname{grad}\Psi$ и $\operatorname{div}\vec{B}$:

ПОСК

$$\Delta\Psi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Psi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Psi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Psi}{\partial q_3}\right)\right\}.$$

ПСК

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}.$$

ЦСК

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}.$$

ССК

$$\Delta\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial \theta}\right).$$

1.

Считая известными нули $\Phi(x)$, вычислите $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\delta(\Phi(x))\,dx$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cdot\delta(\Phi(x))\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cdot\sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left|\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_{x=x_i}\right|}\,dx =$$

$$= \sum_i \frac{1}{\left|\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=x_i}\right|} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\delta(x-x_i)\,dx = \sum_i \frac{F(x_i)}{\left|\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=x_i}\right|}$$

1.6.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\delta(4x^2-1)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\frac{\delta(2x-1)+\delta(2x+1)}{2\cdot|1|}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\delta(2x-1)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\delta(2x+1)\,dx =$$
$$= \frac{1}{16}\int_{-\infty}^{+\infty}(2x)^2\delta(2x-1)\,d(2x) + \frac{1}{16}\int_{-\infty}^{+\infty}(2x)^2\cdot\delta(2x+1)\,d(2x) = \frac{1}{16}\cdot(2\cdot 1)^2 + \frac{1}{16}(2\cdot(-1))^2 =$$
$$= \frac{1}{2}.$$

1.7.
$$\int_1^{10} x\,\delta\left(\sin\frac{\pi x}{3}\right)dx = \int_1^{10} x\cdot\sum_{i=1}^{3}\frac{\delta(x-x_i)}{\left|\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{\pi x}{3}\right)_{x=x_i}\right|}\,dx =$$

$\sin\frac{\pi x}{3} = 0$, $\frac{\pi x}{3} = \pi n$, $x = 3n$, $n\in\mathbb{Z}$

$x\in[1,10] \Rightarrow n = 1,2,3.$

$$= \int_1^{10} x\cdot\frac{\delta(x-3)}{\frac{\pi}{3}\cos\pi}\,dx + \int_1^{10} x\cdot\frac{\delta(x-6)}{\frac{\pi}{3}\cos 2\pi}\,dx +$$
$$+ \int_1^{10} x\,\frac{\delta(x-9)}{\frac{\pi}{3}\cos 3\pi}\,dx = -\frac{3}{\pi}\cdot 3 + \frac{3}{\pi}\cdot 6 - \frac{3}{\pi}\cdot 9 = -\frac{18}{\pi}$$

1.8. $\delta(X-x_0)$

Пусть $X - x_0 = \tilde{x} \Rightarrow \delta(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\delta}(k)\cdot e^{-ik\tilde{x}}\,dk.$

$$\tilde{\delta}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tilde{\xi})\,e^{ik\tilde{\xi}}\,d\tilde{\xi} = e^{ik\tilde{\xi}}\Big|_{\tilde{\xi}=0} = 1,$$
$$\Rightarrow \delta(\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik\tilde{x}}\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(X-x_0)}\,dk.$$

1.9 Плотность точечного заряда:

$$\rho(\bar{r}) = e\cdot\delta(\bar{r}-\bar{r}_0) = e\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0),$$
$$\| \; e = \int\rho(\bar{r})\,d\bar{r} = \int e\cdot\delta(\bar{r}-\bar{r}_0)\,d\bar{r} = e \; \|$$
$$\rho(\bar{r}) = e\,\frac{\delta(r-r_0)\,\delta(\theta)\,\delta(\varphi)}{r^2\sin\theta},$$
$$\| \; e = \int\rho(\bar{r})\,d\bar{r} = e\int\frac{\delta(r-r_0)\,\delta(\theta)\,\delta(\varphi)}{r^2\sin\theta}\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = e$$

1.10. Заряд q равномерно распределен по поверхности шара радиуса R.

Поверхн. плот.: $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$.

Об'ем. плот: $\rho(\bar{r}) = \sigma\cdot\delta(r-R) = \frac{q}{4\pi R^2}\,\delta(r-R).$

1.10a Заряд q равномерно распределен по тонкому кольцу радиуса R.

Лин. плот.: $\varkappa = \frac{q}{2\pi R}$.

Об'ем. плот.: $\rho(\bar{r}) = \varkappa\cdot\delta(r-R)\,\delta(\theta) =$
$$= \frac{q}{2\pi R}\,\delta(r-R)\,\delta(\theta).$$

$\vec n(\theta,\varphi) = \left\{\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right\} = \{\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\}$

1.11. $\overline{n_i} = \frac{1}{4\pi}\int n_i\,do$, $\overline{n_i n_k} = \frac{1}{4\pi}\int n_i n_k\,do$, поэтому они будут вращаться как тензоры, компоненты которых не зависят от выбора СО.

Т.к. не существует вектора, кроме $\vec 0$, компонента которого не зависит от СО, т.е. $\overline{n_i} = 0$.

Тензор $\overline{n_i n_k}$ должен вращаться как симметричный тензор II ранга, компоненты которого одинаковы во всех СО $\Rightarrow \overline{n_i n_k} = \lambda\delta_{ik}$.

Свертка $\overline{n_i n_i} = n^2 = 1 = 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik}$.

Аналогично, $\overline{n_i n_k n_l} = 0$;

$\overline{n_i n_k n_l n_m} = \frac{1}{15}\left(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}\right)$.

Задание 2. Электростатика. Магнитостатика.

2.1. $\Delta\varphi = -4\pi\rho(\vec r)$

$\varphi(\vec r) = \int\tilde\varphi(\vec k)e^{i\vec k\vec r}d\vec k$, $\rho(\vec r) = \int\tilde\rho(\vec k)e^{i\vec k\vec r}d\vec k$,

$\tilde\varphi(\vec k) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\varphi(\vec r\,')e^{-i\vec k\vec r\,'}d\vec r\,'$,

$\tilde\rho(\vec k) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\rho(\vec r\,')e^{-i\vec k\vec r\,'}d\vec r\,'$.

$\Delta\int\tilde\varphi(\vec k)e^{i\vec k\vec r}d\vec k = \int\tilde\varphi(\vec k)\Delta e^{i\vec k\vec r}d\vec k = -k^2\int\tilde\varphi(\vec k)e^{i\vec k\vec r}d\vec k$,

$-k^2\int\tilde\varphi(\vec k)e^{i\vec k\vec r}d\vec k = -4\pi\int\tilde\rho(\vec k)e^{i\vec k\vec r}d\vec k$,

$\tilde\varphi(\vec k) = \frac{4\pi}{k^2}\tilde\rho(\vec k)$.

$\varphi(\vec r) = \int\frac{4\pi}{k^2}\tilde\rho(\vec k)e^{i\vec k\vec r}d\vec k = \frac{1}{2\pi^2}\int\rho(\vec r\,')d\vec r\,'$.

$\int\frac{e^{i\vec k(\vec r-\vec r\,')}}{k^2}d\vec k$.

Пусть $\vec R = \vec r - \vec r\,'$, $\vec k\vec R = kR\cos\theta$,

$d\vec k = 2\pi k^2\,dk\sin\theta\,d\theta \Rightarrow$

$$\int\frac{e^{i\vec k(\vec r-\vec r\,')}}{k^2}d\vec k = 2\pi\int_0^\infty dk\int_0^\pi e^{ikR\cos\theta}\sin\theta\,d\theta =$$

$$= -2\pi\int_0^\infty dk\,\frac{e^{ikR\cos\theta}}{ikR}\Big|_0^\pi = \frac{2\pi}{R}\int_0^\infty 2\,\frac{\sin(kR)}{k}\,dk =$$

$$= \frac{4\pi}{R}\int_0^\infty\frac{\sin(kR)}{kR}\,d(kR) = \frac{4\pi}{R}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi^2}{R}.$$

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{2\pi^2}\int \rho(\vec r')\,d\vec r' \cdot \frac{2\pi^2}{R} = \int \frac{\rho(\vec r')\,d\vec r'}{|\vec r-\vec r'|}.$$

2.2 $\varphi(r) = \frac{A}{r}e^{-r/b}$.

$\varphi(r) = \frac{A}{r} + \frac{A}{r}\left(e^{-r/b}-1\right)$: видно, что во 2 слагаемом при $r\to 0$ особенности нет

$$\frac{A}{r}\left(e^{-r/b}-1\right)\Big|_{r\to 0} = \frac{A}{r}\left(1-\frac{r}{b}-1\right) = -\frac{A}{b}.$$

$$\Delta\varphi = A\Delta\frac{1}{r} + A\Delta\frac{1}{r}\left(e^{-r/b}-1\right) = -4\pi\rho(r),$$

$$A\Delta\frac{1}{r} = -A4\pi\delta(r),$$

$$\Delta\frac{1}{r}\left(e^{-r/b}-1\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(e^{-r/b}-1\right),$$

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{-r/b}-1\right) = -\frac{1}{b}e^{-r/b};\\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(e^{-r/b}-1\right) = \frac{1}{b^2}e^{-r/b},\end{cases}$$

$$\Delta\frac{1}{r}\left(e^{-r/b}-1\right) = \frac{1}{rb^2}e^{-r/b}.$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\delta(r)A + \frac{A}{rb^2}e^{-r/b} = -4\pi\rho(r) \Rightarrow$$

$$\rho(r) = A\delta(r) - \frac{A}{4\pi b^2}\cdot\frac{e^{-r/b}}{r}.$$

В начале координат находится точечный заряд A и сферически-сим-но распределенный объемный заряд с

$$\rho = -\frac{A}{4\pi b^2}\,\frac{e^{-r/b}}{r}.$$

Полный заряд: $Q = \int\rho\,dV = \int\left(A\delta(r) - \frac{A}{4\pi b^2}\cdot\frac{e^{-r/b}}{r}\right)\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = 4\pi\int_0^\infty A\delta(r)r^2dr - \int_0^\infty\frac{A}{b^2}e^{-r/b}\cdot r\,dr = 0 - \frac{A}{b^2}\int_0^\infty re^{-r/b}dr =$

$= \left\{\begin{matrix}u=r, & du=dr,\\ dv=e^{-r/b}dr, & v=-be^{-r/b}\end{matrix}\right\} = \frac{A}{b^2}r\cdot be^{-r/b}\Big|_0^\infty - \frac{A}{b^2}b\int_0^\infty e^{-r/b}dr = 0 + \frac{A}{b^2}\cdot b^2\cdot e^{-r/b}\Big|_0^\infty =$

$= A(0-1) = -A.$

2.3 Пусть заряды распределены сферически симметрично.

Рассмотрим сферическую поверхность радиуса R, являющуюся границей распределения зарядов.

По т. Гаусса поток эл. поля через эту поверхность: $4\pi R^2\cdot E = 4\pi\int^R\rho(r')\,d\vec r'$

$$\Rightarrow \vec E = \frac{\vec R}{R^3}\int\rho(r')\,d\vec r' = \frac{4\pi\vec R}{R^3}\int_0^R\rho(r')r'^2dr'.$$

Потенциал этого поля $\varphi_1 = \frac{1}{R}\int^R\rho(r')\,d\vec r' =$

$$= \frac{4\pi}{R}\int_0^R\rho(r')r'^2dr'.$$

Начиная со сферической поверхности радиуса R и далее:

$$\varphi_2 = 4\pi\int_R^\infty\frac{\rho(r')}{r'}r'^2dr' = 4\pi\int_R^\infty\rho(r')r'\,dr'.$$

$$\varphi(r) = \varphi_1+\varphi_2 = \frac{4\pi}{R}\int_0^R\rho(r')r'^2dr' + 4\pi\int_R^\infty\rho(r')r'\,dr'.$$

(2.4) $\rho_e(r) = -\frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi(r)) = \frac{4e}{a^3}e^{-2r/a},$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi(r)) = \frac{4e}{a^3}\int r\cdot e^{-2r/a}dr = \frac{4e}{a^3}\left\{-\frac{a}{2}re^{-2r/a} + \frac{a}{2}\int e^{-2r/a}dr\right\} = \frac{4e}{a^3}\left\{-\frac{a}{2}re^{-2r/a} - \frac{a^2}{4}e^{-2r/a} + C\right\}.$$

$$r\varphi(r) = -\frac{2e}{a^2}\left\{\int re^{-2r/a}dr + \frac{a}{2}\int e^{-2r/a}dr + \int C\,dr\right\} =$$

$$= \frac{e}{a}\cdot r\cdot e^{-2r/a} + e\,e^{-2r/a} + Cr + \tilde{C}.$$

$$\varphi(r) = \frac{e}{a}e^{-2r/a} + \frac{e}{r}e^{-2r/a} + C + \frac{\tilde{C}}{r}.$$

Положим $C=0$, $\tilde{C}=-e$, что соответствует потенциалу одиночного e $\left(-\frac{e}{r}\right)$.

Потенциал эл. облака:

$$\varphi_e(r) = \frac{e}{a}e^{-2r/a} - \frac{e}{r}\left(1 - e^{-2r/a}\right).$$

Потенциал эл. поля в атоме:

$$\varphi(r) = \varphi_e(r) + \varphi_я(r) = \varphi_e(r) + \frac{e}{r}.$$

Энергия взаимодействия эл. облака с ядром:

$$U = \int\rho_e(r)\cdot\varphi_я(r)\,d\tau = -\frac{e}{\pi a^3}\int_0^\infty e^{-2r/a}\cdot\frac{e}{r}\cdot r^2dr\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta = -\frac{4e^2}{\pi a^3}\int_0^\infty re^{-2r/a}dr =$$

$$= \frac{4e^2}{\pi a^3}\left\{\frac{a}{2}\underbrace{re^{-2r/a}\Big|_0^\infty}_{0} - \frac{a}{2}\int_0^\infty e^{-2r/a}dr\right\} =$$

$$= \frac{4e^2}{\pi a^3}\cdot\frac{a^2}{4}e^{-2r/a}\Big|_0^\infty = -\frac{e^2}{a}.$$

Энергия электронного облака:

$$U_e = \frac{1}{2}\int\rho_e(r)\cdot\varphi_e(r)\,d\tau = \frac{1}{2}\left(-\frac{e}{\pi a^3}\right)\int e^{-2r/a}\cdot\left(\frac{e}{a}e^{-2r/a} - \frac{e}{r}\left(1-e^{-2r/a}\right)\right)d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{e^2}{\pi a^4}4\pi\underbrace{\int_0^\infty e^{-4r/a}r^2dr}_{I_1} + \frac{1}{2}\frac{e^2}{\pi a^3}4\pi\underbrace{\int_0^\infty e^{-2r/a}\left(1-e^{-2r/a}\right)r\,dr}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-4r/a}r^2dr = \left\|\begin{matrix}u=r^2, & du=2r\,dr\\ dv=e^{-4r/a}dr, & v=-\frac{a}{4}e^{-4r/a}\end{matrix}\right\| =$$

$$= -\frac{a}{4}\cdot\underbrace{r^2e^{-4r/a}\Big|_0^\infty}_{0} + \frac{a}{2}\int_0^\infty re^{-4r/a}dr =$$

$$= \left\|\begin{matrix}u=r, & du=dr\\ v=-\frac{a}{4}e^{-4r/a}\end{matrix}\right\| = -\frac{a^2}{8}\underbrace{re^{-4r/a}\Big|_0^\infty}_{0} +$$

$$+ \frac{a^2}{8}\int_0^\infty e^{-4r/a}dr = -\frac{a^3}{32}e^{-4r/a}\Big|_0^\infty = \frac{a^3}{32}.$$

$$I_2 = \int_0^\infty e^{-2r/a}\left(1-e^{-2r/a}\right)r\,dr = \int_0^\infty e^{-2r/a}r\,dr -$$

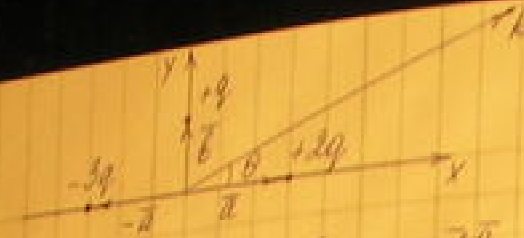
$$- \int_0^\infty e^{-4r/a}r\,dr = -\frac{a^2}{4}e^{-2r/a}\Big|_0^\infty + \frac{a^2}{16}e^{-4r/a}\Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16} = \frac{a^2}{16}.$$

$$U_e = -\frac{2e^2}{a^4}\cdot\frac{a^3}{32} + \frac{2e^2}{a^3}\cdot\frac{a^2}{16} = -\frac{e^2}{16a} + \frac{e^2}{8a} =$$

$$= \frac{e^2}{16a}.$$

2.5



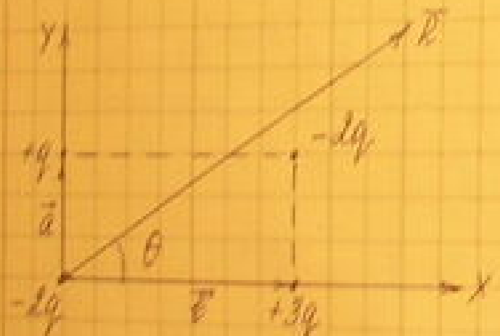
$$\varphi = \sum_i \frac{e_i}{|\vec R - \vec r_i|} = \frac{\sum e_i}{R} + \frac{\vec d \vec R}{R^3} + \dots$$

$$\vec d = \sum_i e_i \vec r_i = q(\vec R - \vec b) + 2q(\vec R - \vec a) - 3q(\vec R - (-\vec a)) = -q\vec b - 2q\vec a - 3q\vec a = -q\vec b - 5q\vec a,$$

$$\vec d\vec R = -q\vec b\cdot\vec R - 5q\vec a\vec R = -qbR\sin\theta - 5qaR\cos\theta = -qR(b\sin\theta + 5a\cos\theta),$$

$$\varphi = -\frac{q}{R^2}(b\sin\theta + 5a\cos\theta).$$

2.6



$$\vec d = q(\vec R - \vec a) + 3q(\vec R - \vec b) - 2q\vec R - 2q(\vec R - (\vec a + \vec b)) = -q\vec a - 3q\vec b + 2q\vec a + 2q\vec b = q\vec a - q\vec b,$$

$$\vec d\vec R = q\vec a\vec R - q\vec b\vec R = qaR\sin\theta - qbR\cos\theta,$$

$$\varphi = \frac{q}{R^2}(a\sin\theta - b\cos\theta).$$

2.7 $\sigma_s = q\sin\theta/r^2$, $R \gg r$, плоский диск радиу-

$$\varphi(r) = \frac{\sum e_i}{R} + \frac{\vec d\vec R}{R^3} + \dots$$

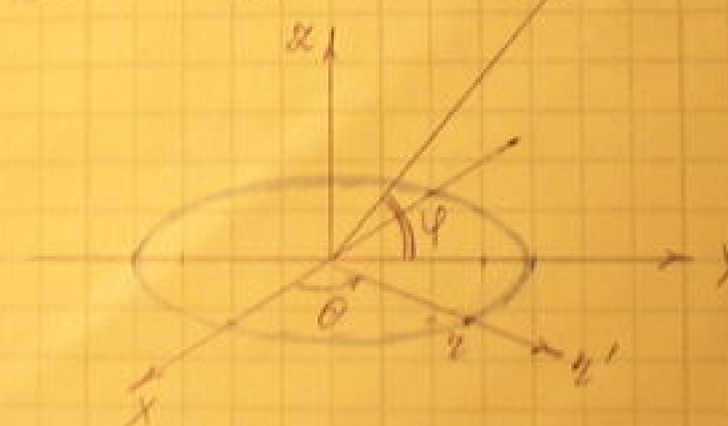
$$\sum_i e_i = \int_S \sigma_s\, dS = \int q \frac{\sin\theta}{r^2} r'dr'd\theta = q\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^r \frac{r'dr'}{r^2} = 0,$$

$$\vec d = \int \sigma_s(\vec R - \vec r')\, dS = \int \sigma_s \cancel{\vec R}\, dS - \int \sigma_s \vec r'\, dS =$$

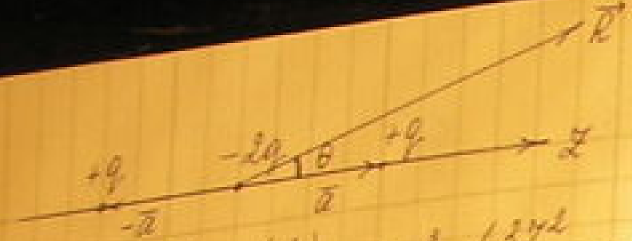
$$= -\vec i\int \frac{q}{r^2}\sin\theta\cdot r'\cos\theta\, r'dr'd\theta - \vec j\int \frac{q}{r^2}\sin\theta\cdot r'\sin\theta\, r'dr'd\theta = -\vec i\,\frac{q}{r^2}\int_0^{2\pi}\sin\theta\, \cancel{d}(\sin\theta)\cdot\int_0^r r'^2 dr' - \vec j\,\frac{q}{r^2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta\cdot\int_0^r r'^2 dr' =$$

$$= -\vec j\,\frac{q}{r^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{r^3}{3} = -\frac{\pi}{3} q r\vec j$$

$$\varphi(r) = \frac{\vec d\vec R}{R^3} = -\frac{\pi}{3} q r R\cos\varphi\cdot\frac{1}{R^3} = -\frac{\pi}{3} q\cdot\frac{r\cos\varphi}{R^2}$$



2.8



$R \gg a$

$$\sum_a e_a x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{1}{R}\right) = 2a^2 q\left(\frac{3z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3}\right) =$$

$$= 2a^2 q\,\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{R^3}.$$

$$\varphi = a^2 q\cdot\frac{3\cos^2\theta - 1}{R^3}.$$

2.9

$\sum_i e_i = 0, \quad \vec d = \vec 0,$

$$\sum_a e_a x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{1}{R}\right) = -\left\{q a^2 \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{R^3} - q b^2 \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{R^3}\right\}$$

„–", т.е. $D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz}$

$$\varphi = \frac{q(b^2 - a^2)}{2}\cdot\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{R^3}.$$

2.12 Энергия взаимодействия q и $\vec p$:

Считая, что поле квазиоднородное:

$$U = U^{(1)} = (\operatorname{grad}\varphi)_0\cdot\vec p = -\frac{q\vec r}{r^3}\cdot\vec p$$

Сила, действующая на диполь:

$$\vec F = (\operatorname{grad}\vec p\vec E)_0 = -q\frac{3(\vec p\vec r)\vec p}{r^5} + q\frac{\vec p}{r^3}.$$

Момент сил:

$$\vec K = q\cdot\frac{[\vec p\vec r]}{r^3}.$$

Энергия взаимодействия $\vec p_1$ и $\vec p_2$: 2.13.

$$U = (\operatorname{grad}\varphi_2)_0\,\vec p_1 = -\vec p_1\vec E_2 = -\vec p_1\left(\frac{3(\vec p_2\vec n)\vec n}{r^3} - \frac{\vec p_2}{r^3}\right) = \frac{\vec p_1\vec p_2 - 3(\vec p_1\vec n)(\vec p_2\vec n)}{r^3}.$$

Энергия взаимодействия q и $D_{\alpha\beta}$: 2.14.

Если φ – потенциал поля, создаваемого q, то:

$$U = \frac{D_{\alpha\beta}}{6}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}$$

Шар радиуса r, $R \gg r$, $\vec\omega = \{0, 0, \omega_z\}$. 2.15.

Разложим $\vec A$ по степеням $|\vec R - \vec r|$:

$$\vec A = \frac{1}{cR}\int\rho\vec v\,d\vec r\,' + \frac{[\vec m\vec R]}{R^3} + \ldots$$

$$\int\rho\vec v\,d\vec r\,' = \int\rho\,[\vec\omega\vec r\,']\,d\vec r = \int\rho\left(\vec i\,y\omega_z - \vec j\,x\omega_z\right)\cdot r'^2 dr' \sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \rho\int\vec i\,r'^3 \sin\theta\cos\varphi\,dr'\sin\theta\,d\theta\,d\varphi - \rho\int\vec j\,r'^3\sin^2\theta\sin\varphi\,dr'\,d\theta\,d\varphi = 0.$$

$$\vec{\pi} = \frac{1}{2c}\int \rho[\vec{r}'\vec{v}]\,d\tau' = \frac{1}{2c}\int \rho[\vec{r}'[\vec{\omega}\vec{r}']]\,d\tau' =$$

$$= \frac{1}{2c}\int \rho\left(\vec{\omega} r'^2 - \vec{r}'(\vec{r}'\vec{\omega})\right)d\tau' = \frac{1}{2c}\int \rho\vec{\omega}\, r'^4\, dr' \cdot$$

$$\cdot \sin\theta\, d\theta\, d\varphi - \frac{\rho}{2c}\int \vec{r}'\cdot \omega_z z\, d\tau' = \frac{1}{2c}\cdot 4\pi\rho\vec{\omega}\frac{r^5}{5} -$$

$$-\frac{\rho}{2c}\int \vec{r}'\omega_z z r'^2\, dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{5}\rho\omega_z\frac{r^5}{5}\vec{k} - \frac{\rho}{2c}\omega_z\int \vec{r}' r'^3 \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, dr'\, d\varphi \Rightarrow$$

$$= \frac{2\pi}{5c}\rho r^5\vec{\omega} - \frac{2}{15}\frac{\pi}{c}\rho\vec{\omega} r^5 = \frac{4}{15}\frac{\pi}{c}\rho r^5\vec{\omega}$$

$$\vec{A} = \frac{[\vec{\pi}\vec{R}]}{R^3} = \frac{4\pi}{3c}\rho\cdot\frac{r^5}{5}\frac{[\vec{\omega}\vec{R}]}{R^3},$$

$$[\vec{\omega}\vec{R}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \vec{j}\,\omega_z R_x - \vec{i}\,\omega_z R_y$$

$$\vec{A} = \left\{-\frac{4}{15}\frac{\pi}{c}\rho r^5\frac{\omega_z R_y}{R^3};\ \frac{4}{15}\frac{\pi}{c}\rho r^5\frac{\omega_z R_x}{R^3};\ 0\right\}$$

т.к. $\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3}$, то $\vec{A} = \frac{4}{15}\cdot\frac{3}{4}qr^2\frac{[\vec{\omega}\vec{R}]}{R^3}$,

$$\vec{A} = \left\{-\frac{qr^2}{5c}\frac{\omega_z R_y}{R^3};\ \frac{qr^2}{5c}\frac{\omega_z R_x}{R^3};\ 0\right\}$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial R_x} & \frac{\partial}{\partial R_y} & \frac{\partial}{\partial R_z} \\ -\frac{qr^2}{5c}\frac{\omega_z R_y}{R^3} & \frac{qr^2}{5c}\frac{\omega_z R_x}{R^3} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{-\vec{i}\frac{\partial}{\partial R_z}\frac{R_x}{R^3} - \vec{j}\frac{\partial}{\partial R_z}\frac{R_y}{R^3} + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial R_x}\frac{R_x}{R^3} + \frac{\partial}{\partial R_y}\frac{R_y}{R^3}\right)\right\}\cdot\frac{qr^2}{5c}\omega_z =$$

$$= \left\{\vec{i}\frac{3R_xR_z}{R^5} + \vec{j}\frac{3R_yR_z}{R^5} + \vec{k}\left(\frac{1}{R^3} - \frac{3R_x^2}{R^5} + \frac{1}{R^3} - \frac{3R_y^2}{R^5}\right)\right\}\frac{qr^2}{5c}\omega_z =$$

$$\vec{r}' = \vec{i}\, r'\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}\, r'\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\, r'\cos\theta$$

$$\vec{i} \Rightarrow \int r'^4\cos\theta\sin^2\theta\cos\varphi\, d\theta\, dr'\, d\varphi = \int r'^4\, dr' \cdot$$

$$\cdot \int \cos\theta\sin\theta\cos\varphi\, d\Omega = \int r'^4\, dr' \cdot 4\pi\,\overline{n_1 n_3} = 0,$$

$$\Rightarrow \vec{j} \Rightarrow \int r'^4\cos\theta\sin^2\theta\sin\varphi\, d\theta\, dr'\, d\varphi = \int r'^4\, dr' \cdot$$

$$\cdot \int \cos\theta\sin\theta\sin\varphi\, d\Omega = \int r'^4\, dr' \cdot 4\pi\,\overline{n_2 n_3} = 0.$$

$$\vec{k} \Rightarrow \int r'^4\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\, dr'\, d\varphi = -2\pi\frac{r^5}{5}\int_0^\pi \cos^2\theta\, d(\cos\theta) =$$

$$= -2\pi\frac{r^5}{5}\cdot\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^\pi = \frac{2}{15}r^5\cdot 2\pi = \frac{4\pi}{15}r^5.$$

$$= \left\{\frac{3R_xR_z}{R^5}\vec{i} + \frac{3R_yR_z}{R^5}\vec{j} + \left(\frac{3R_z^2}{R^5} - \frac{1}{R^3}\right)\vec{k}\right\}\frac{qr^2}{5c}\omega_z$$

$$\vec{H} = \frac{qr^2}{5c}\omega_z\frac{1}{R^5}\left\{3R_xR_z;\ 3R_yR_z;\ 3R_z^2 - R^2\right\}.$$

Задание 3. Плоские волны. Потенциалы Лиенара - Вихерта.

1 а) линейная поляризация:

$$\vec E(z,t) = E_x\vec i = E_1\cos(\omega t - kz + \alpha)\vec i,$$

$$\vec H(z,t) = H_y\vec j = E_x\vec j = E_1\cos(\omega t - kz + \alpha)\vec j$$

или

$$\vec E(z,t) = E_y\vec j = \pm E_2\sin(\omega t - kz + \alpha)\vec j,$$

$$\vec H(z,t) = H_x\vec i = -E_y\vec i = \mp E_2\sin(\omega t - kz + \alpha)\vec i$$

б) круговая поляризация:

$$\vec E(z,t) = E_x\vec i + E_y\vec j = E_0\cos(\omega t - kz + \alpha)\vec i \pm E_0\sin(\omega t - kz + \alpha)\vec j,$$

$$\vec H(z,t) = H_x\vec i + H_y\vec j = -E_y\vec i + E_x\vec j = \mp E_0\sin(\omega t - kz + \alpha)\vec i + E_0\cos(\omega t - kz + \alpha)\vec j.$$

в) эллиптич. пол-ция:

$$\vec E(z,t) = E_x\vec i + E_y\vec j = E_1\cos(\omega t - kz + \alpha)\vec i \pm E_2\sin(\omega t - kz + \alpha)\vec j.$$

2) плоской волны:

а) объемная плотность энергии

$$w = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) = \frac{1}{4\pi}E^2$$

$$w = \frac{1}{4\pi}\Big(E_1^2\cos^2(\omega t - kz + \alpha) + E_2^2\sin^2(\omega t - kz + \alpha) \pm 2E_1E_2\cos(\omega t - kz + \alpha)\cdot\sin(\omega t - kz + \alpha)\cdot\underbrace{(\vec i\cdot\vec j)}_{0}\Big) = \frac{1}{4\pi}E_1^2\cos^2(\omega t - kz + \alpha) + \frac{1}{4\pi}E_2^2\sin^2(\omega t - kz + \alpha).$$

б) плотность потока энергии:

$$\vec S = \frac{c}{4\pi}[\vec E\vec H] = \frac{c}{4\pi}[\vec E[\vec k\vec E]] = \frac{c}{4\pi}E^2\vec k = c\cdot w\cdot\vec k$$

$$\vec S = \frac{c}{4\pi}\left(E_1^2\cos^2(\omega t - kz + \alpha) + E_2^2\sin^2(\omega t - kz + \alpha)\right)\vec k.$$

3.3

$$\vec r = \vec r_0(t)$$

Запаздывающие потенциалы:

$$\varphi(\vec r,t) = \int\frac{\rho\left(\vec r', t - \frac{|\vec r - \vec r'|}{c}\right)d\vec r'}{|\vec r - \vec r'|} + \varphi_0(\vec r,t),$$

$$\vec A(\vec r,t) = \frac{1}{c}\int\frac{\vec j\left(\vec r', t - \frac{|\vec r - \vec r'|}{c}\right)d\vec r'}{|\vec r - \vec r'|} + \vec A_0(\vec r,t).$$

Т.к. заряд q точечный, то $\rho = e\cdot\delta(\vec r' - \vec r_0)$,

$$\vec j = \rho\vec v_0 = e\delta(\vec r' - \vec r_0)\vec v_0(t) \Rightarrow$$

$$\varphi(\vec r,t) = e\int\frac{\delta(\vec r' - \vec r_0(\tau))d\vec r'}{|\vec r - \vec r'|} = e\int\frac{\delta\left(\vec r' - \vec r_0\left(t - \frac{|\vec r - \vec r'|}{c}\right)\right)d\vec r'}{|\vec r - \vec r'|}$$

Пусть $l_x = x' - x_0(\tau)$, $l_y = y' - y_0(\tau)$, $l_z = z' - z_0(\tau)$.

Рассмотрим движение q вдоль оси x_0, т.е. $v_x = v_0$:

$$\frac{\partial l_x}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_0}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial x'} =$$

$= 1 - v_0 \frac{\partial}{\partial x}\left\{t - \frac{|\bar r - \bar r'|}{c}\right\} = 1 - \frac{v_0}{c}\frac{x-x'}{|\bar r - \bar r'|}$;

$\frac{\partial l_x}{\partial y'} = 0 = \frac{\partial l_x}{\partial z'}$; $\frac{\partial l_y}{\partial x'} = 0$; $\frac{\partial l_y}{\partial y'} = 1$; $\frac{\partial l_y}{\partial z'} = 0$;

$\frac{\partial l_z}{\partial x'} = \frac{\partial l_z}{\partial y'} = 0$; $\frac{\partial l_z}{\partial z'} = 1$.

Якобиан: $\frac{\partial(l_x,l_y,l_z)}{\partial(x',y',z')} = 1 - \frac{v_0(x-x')}{c|\bar r-\bar r'|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial(l_x,l_y,l_z)}{\partial(x',y',z')} = 1 - \frac{\bar v_0(\bar r - \bar r')}{c|\bar r - \bar r'|}$

Тогда $dx'dy'dz' = \frac{\partial(x',y',z')}{\partial(l_x,l_y,l_z)} dl_x dl_y dl_z =$

$$= \frac{dl_x dl_y dl_z}{1 - \frac{\bar v_0(\bar r-\bar r')}{c|\bar r-\bar r'|}} = \frac{d\bar l}{1-\frac{\bar v_0(\bar r - \bar r')}{c|\bar r - \bar r'|}}.$$

$$\varphi(\bar r,t) = e\int \frac{\delta(\bar l)\,d\bar l}{|\bar r - \bar l - \bar r_0| - \frac{(\bar r - \bar l - \bar r_0)}{c}\bar v_0\left(t - \frac{\bar r - \bar l - \bar r_0}{c}\right)} =$$

$$= \frac{e}{|\bar r - \bar r_0| - \frac{\bar v_0(\tau)}{c}(\bar r - \bar r_0)} = \frac{e}{R(\tau) - \frac{\bar v_0(\tau)\bar R(\tau)}{c}}$$

$$A(\bar r,t) = \frac{e}{c}\int \frac{\delta(\bar r' - \bar r_0(\tau))\,\bar v_0(\tau)\,d\bar r'}{|\bar r - \bar r'|} =$$

$$= \frac{e}{c}\int\frac{\delta\left(\bar r' - \bar r_0\left(t - \frac{|\bar r-\bar r'|}{c}\right)\right)\bar v_0\left(t - \frac{|\bar r - \bar r'|}{c}\right)d\bar r'}{|\bar r - \bar r'|} =$$

$$= \frac{e}{c}\int \frac{\delta(\bar l)\,\bar v_0\left(t - \frac{|\bar r - \bar l - \bar r_0|}{c}\right)d\bar l}{|\bar r - \bar l - \bar r_0| - \frac{(\bar r - \bar l - \bar r_0)}{c}\bar v_0\left(t - \frac{\bar r - \bar l - \bar r_0}{c}\right)} =$$

$$= \frac{e\bar v_0(\tau)}{|\bar r - \bar r_0| - \frac{\bar v_0(\tau)}{c}(\bar r - \bar r_0)} = \frac{e\bar v_0(\tau)}{R(\tau) - \frac{\bar v_0(\tau)\bar R(\tau)}{c}}$$

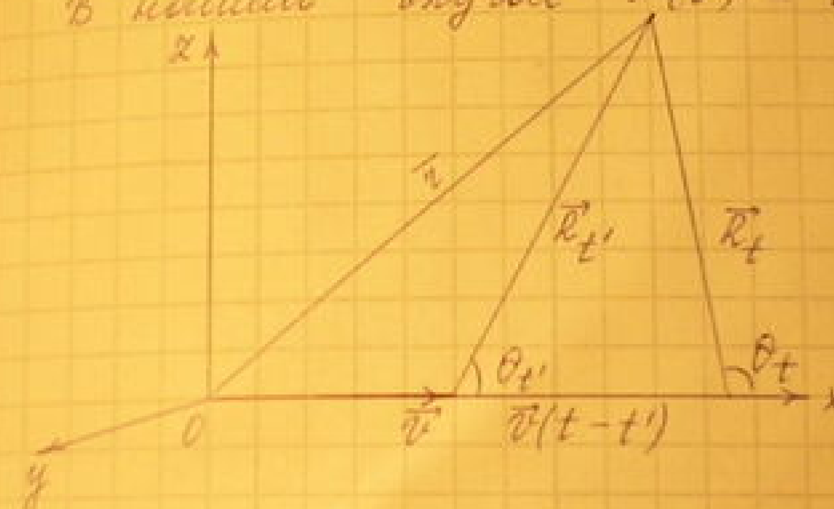
$\Rightarrow \bar A = \frac{\bar v_0}{c}\varphi$.

Пусть заряд q движется равномерно вдоль оси Ox со скоростью (3.4.)
$\bar v = \{v_x, 0, 0\}$.

$\bar r = \{x,y,z\}$, $\bar R_t = \{x - v_x t, y, z\}$.

$$\varphi(\bar r,t) = \frac{e}{R(t') - \frac{\bar v(t')\bar R(t')}{c}}; \quad \bar A(\bar r,t) = \frac{e\bar v(t')}{R(t') - \frac{\bar v(t')\bar R(t')}{c}}.$$

В нашем случае $\bar v(t') = \bar v$.



$$t = t' + \frac{|\bar r - \bar r'|}{c} = t' + \frac{|\bar R|}{c} = t' + \frac{R(t')}{c}.$$

Обозначим $R(t') = R_{t'}$, $R(t) = R_t$.

v $\left(R_{t'} - \frac{1}{c}\bar R_{t'}\bar v\right)^2 = R_{t'}^2 - \frac{2}{c}R_{t'}\bar R_{t'}\bar v + \frac{1}{c^2}R_{t'}^2 v^2\cos^2\theta_{t'}$

$R_{t'}^2 = R_t^2 + v^2(t-t')^2 - 2R_t v(t-t')\cos(\pi - \theta_t) =$

$= R_t^2 + v^2(t-t')^2 + 2R_t v(t-t')\cos\theta_t$

$\bar R_{t'}\bar v = R_{t'} v\cos\theta_{t'}$

v $R_t^2 + v^2(t-t')^2 + 2R_t v(t-t')\cos\theta_t - \frac{2}{c}R_{t'}^2 v\cos\theta_{t'} +$

$+ \frac{1}{c^2}R_{t'}^2 v^2\cos^2\theta_{t'} = R_t^2 + v^2(t-t')^2 + 2R_t v(t-t')\cos\theta_t -$

В то же время $R_{t'} = c(t-t')$

$$R_t^2 + v^2(t-t')^2 + v^2(t-t')^2 - 2v(t-t')\{R_{t'}\cos\theta_{t'} + R_t\cos(\pi-\theta_t)\} =$$

$$= R_t^2 + v^2(t-t')^2 - 2v^2(t-t')^2 + v^2(t-t')^2\cos^2\theta_t =$$

$$= R_t^2 - v^2(t-t')^2\sin^2\theta_t = R_t^2 - \frac{v^2}{c^2}R_{t'}^2\frac{R_t^2}{R_{t'}^2}\sin^2\theta_t =$$

$$= R_t^2 - \frac{v^2}{c^2}R_t^2\sin^2\theta_t$$

$$\Rightarrow R_{t'} - \frac{1}{c}R_{t'}\vec{v} = \sqrt{R_t^2 - \frac{1}{c}[\vec{v}R_t]^2} =$$

$$= R_t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta_t} = \sqrt{(x-v_x t)^2 + \left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}$$

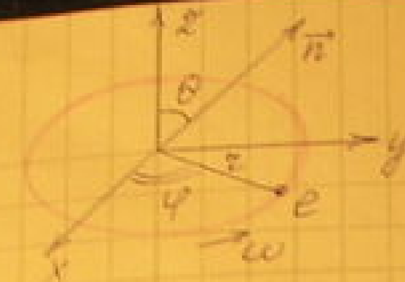
Из рисунка

$$\frac{\sin\theta_{t'}}{\sin\theta_t} = \frac{R_t}{R_{t'}}$$

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{(x-v_x t)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}}$$

$$\vec{A} = \frac{e\vec{v}}{c\sqrt{(x-v_x t)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}}$$

Задание 4. Излучение релятивистской частицы, движущейся по заданному закону



Условие: окружность радиуса r (4.2)

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3}[\vec{w}\vec{n}]^2 d\Omega,$$

$$\vec{w} = -\omega^2\vec{r} = -\omega^2 r\vec{n}', \text{ где } \vec{n}' = \{\cos\omega t', \sin\omega t', 0\},$$

$$\vec{n} = \{\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\}.$$

$$dI = \frac{e^2 r^2\omega^4}{4\pi c^3}[\vec{n}'\vec{n}]^2 d\Omega.$$

$$\overline{[\vec{n}'\vec{n}]^2} = 1 - \overline{(\vec{n}'\vec{n})^2} = 1 - \overline{(n_1\cos\omega t' + n_2\sin\omega t')^2} = 1 - \overline{(n_1^2\cos^2\omega t' + n_2^2\sin^2\omega t' + 2n_1n_2\cos\omega t'\sin\omega t')} = 1 - \frac{1}{2}(n_1^2+n_2^2) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta).$$

$$dI = \frac{e^2 r^2\omega^4}{4\pi c^3}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\,d\Omega.$$

$$\int(1+\cos^2\theta)\,d\Omega = 4\pi\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{16\pi}{3}.$$

$$\overline{I} = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega^4 r^2}{c^3}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c}[\dot{\vec{A}}\vec{n}] = \frac{e}{c^2R}[\vec{w}\vec{n}] = \frac{-e\omega^2 r}{c^2R}[\vec{n}'\vec{n}]$$

$$\begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\\ \sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\theta\\ \vec{e}_\varphi\end{pmatrix}$$

$$[\vec{n}'\vec{n}] = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\omega t' & \sin\omega t' & 0\\ n_1 & n_2 & n_3\end{vmatrix} = \vec{i}\,n_3\sin\omega t' +$$

$$+\vec{j}(-n_3\cos\omega t') + \vec{k}(n_2\cos\omega t' - n_1\sin\omega t') =$$

$= (\cos\varphi\sin\theta\,\bar e_r + \cos\varphi\cos\theta\,\bar e_\theta - \sin\varphi\,\bar e_\varphi)\cos\theta\,\bar e_\varphi\sin\omega t' +$

$+(\sin\varphi\sin\theta\,\bar e_r + \sin\varphi\cos\theta\,\bar e_\theta + \cos\varphi\,\bar e_\varphi)(-\cos\theta\,\bar e_\varphi)\cos\omega t' +$

$+(\cos\theta\,\bar e_r - \sin\theta\,\bar e_\theta)(\sin\theta\sin\varphi\,\bar e_\varphi\cos\omega t' -$

$-\sin\theta\cos\varphi\,\bar e_\varphi\sin\omega t') = (\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,\bar e_r +$

$+\cos\varphi\cos^2\theta\,\bar e_\theta - \sin\varphi\cos\theta\,\bar e_\varphi)\sin\omega t' - (\sin\varphi\sin\theta\cos\theta\,\bar e_r +$

$+\sin\varphi\cos^2\theta\,\bar e_\theta + \cos\varphi\cos\theta\,\bar e_\varphi)\cos\omega t' + (\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\,\bar e_r$

$-\sin^2\theta\sin\varphi\,\bar e_\theta)\cos\omega t' - (\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\,\bar e_r - \sin^2\theta\cos\varphi\,\bar e_\theta)$

$\sin\omega t' = \cos\varphi\,\bar e_\theta\sin\omega t' - \sin\varphi\,\bar e_\theta\cos\omega t' - \sin\varphi\cos\theta\,\bar e_\varphi$

$\sin\omega t' - \cos\varphi\cos\theta\,\bar e_\varphi\cos\omega t' = \bar e_\theta(\cos\varphi\sin\omega t' -$

$-\sin\varphi\cos\omega t') - \bar e_\varphi(\sin\varphi\sin\omega t' + \cos\varphi\cos\omega t')\cos\theta =$

$= \bar e_\theta\sin(\omega t'-\varphi) - \bar e_\varphi\cos(\omega t'-\varphi)\cos\theta =$

$= -\cos\theta\cdot\mathrm{Re}\{\exp(-i(\omega t'-\varphi))\}\bar e_\varphi +$

$+\mathrm{Im}\{\exp(-i(\omega t'-\varphi))\}\bar e_\theta = (-\cos\theta\,\bar e_\varphi +$

$+i\bar e_\theta)\,\mathrm{Re}\{\exp(-i(\omega t'-\varphi))\}.$

$$\bar H = \frac{e\omega^2 r}{c^2R}(\cos\theta\,\bar e_\varphi - i\bar e_\theta)\,\mathrm{Re}\{\exp(-i(\omega t'-\varphi))\}.$$

Если $\cos\theta > 0$ (излучение в верх. полусферу), то поляр-ция — левая эллиптич.
Если $\cos\theta < 0$, то поляр-ция — правая эллипт.
Если $\theta = 0$, то — левая круговая.
Если $\theta = \pi$, то — правая круговая.

Волна, излучаемые в экваториальной плоскости, имеют линейную поляр-цию

4.3. Круговой контур радиуса a с пост. током J вращается с пост. ω в/г оси, к-ая образует угол α с нормалью к плоскости контура

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}[\ddot{\vec\mu}\,\vec n]^2\,d\Omega,$$

$$\vec\mu = \frac{JS}{c}\vec n'' = \frac{J\pi a^2}{c}\vec n'' = \mu\vec n'',$$

$\vec n'' = \{\sin\alpha\cos\omega t', \sin\alpha\sin\omega t', \cos\alpha\},$

$\ddot{\vec\mu} = -\omega^2\mu\sin\alpha\,\vec n', \quad \vec n' = \{\cos\omega t', \sin\omega t', 0\}.$

$$dI = \frac{\mu^2\omega^4\sin^2\alpha}{4\pi c^3}[\vec n'\vec n]^2\,d\Omega$$

Аналогично 4.2, $[\vec n'\vec n] = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) \Rightarrow$

$$dI = \frac{\mu^2\omega^4\sin^2\alpha}{8\pi c^3}(1+\cos^2\theta)\,d\Omega.$$

$$\bar I = \frac{2}{3}\frac{\mu^2\omega^4\sin^2\alpha}{c^3} = \frac{2}{3}\frac{J^2\pi^2a^4\omega^4\sin^2\alpha}{c^5}$$

$$\vec H = \frac{1}{c}[\dot{\vec A}\vec n] = \frac{1}{c}\left[\frac{[\ddot{\vec\mu}\vec n]}{cR}\vec n\right] = \frac{1}{c^2R}[[\ddot{\vec\mu}\vec n]\vec n],$$

$$\vec E = [\vec H\vec n] = \frac{1}{c^2R}[\vec n\ddot{\vec\mu}] = \frac{-\omega^2\mu\sin\alpha}{c^2R}[\vec n\vec n'],$$

$$[\vec n\vec n'] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ \cos\omega t' & \sin\omega t' & 0 \end{vmatrix} = -\vec i\,n_3\sin\omega t' +$$

$+\vec j\,n_3\cos\omega t' + \vec k(n_1\sin\omega t' - n_2\cos\omega t') =$

$$= -(\cos\varphi \sin\theta\, \bar{e}_r + \cos\varphi\cos\theta\, \bar{e}_\theta - \sin\varphi\, \bar{e}_\varphi)\cos\theta \sin\omega t' +$$

$$+ (\sin\varphi\sin\theta\, \bar{e}_r + \sin\varphi\cos\theta\, \bar{e}_\theta + \cos\varphi\, \bar{e}_\varphi)\cos\theta\cos\omega t' +$$

$$+ (\cos\theta\, \bar{e}_r - \sin\theta\, \bar{e}_\theta)(\sin\theta\cos\varphi\sin\omega t' - \sin\theta\sin\varphi\cos\omega t')$$

$$= (\cos\theta\, \bar{e}_\varphi - i\bar{e}_\theta)\, Re\{\exp(-i(\omega t' - \varphi))\}.$$

$$\bar{E} = \frac{\omega^2 J \pi a^2 \sin\alpha}{c^3 R}(i\bar{e}_\theta - \cos\theta\, \bar{e}_\varphi)\, Re\{\exp(-i(\omega t' - \varphi))\}.$$

$$[\bar{n}'\bar{n}] = \bar{e}_\theta(\cos\varphi\sin\omega t' - \sin\varphi\cos\omega t') - \bar{e}_\varphi \cos\theta$$

$$(\sin\varphi\sin\omega t' + \cos\varphi\cos\omega t')$$

$$[[\bar{n}'\bar{n}]\bar{n}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \begin{matrix}\cos\varphi\sin\omega t' - \\ -\sin\varphi\cos\omega t'\end{matrix} & \begin{matrix}(-\sin\varphi\sin\omega t' - \\ -\cos\varphi\cos\omega t')\cdot \\ \cdot\cos\theta\end{matrix} \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\{(\cos\varphi\sin\omega t' - \sin\varphi\cos\omega t')n_3 + n_2(\sin\varphi\sin\omega t' +$$

$$+ \cos\varphi\cos\omega t')\} - \vec{j}(\sin\varphi\sin\omega t' + \cos\varphi\cos\omega t')n_1 -$$

$$- \vec{k}(\cos\varphi\sin\omega t' - \sin\varphi\cos\omega t')n_1 =$$

$$= (\cos\varphi\sin\theta\, \bar{e}_r + \cos\varphi\cos\theta\, \bar{e}_\theta - \sin\varphi\, \bar{e}_\varphi)(\sin(\omega t' - \varphi)\cdot$$

$$\cdot\cos\theta + \cos(\omega t' - \varphi)\sin\theta\sin\varphi) - (\sin\varphi\sin\theta\, \bar{e}_r +$$

$$+ \sin\varphi\cos\theta\, \bar{e}_\theta + \cos\varphi\, \bar{e}_\varphi)\cos(\omega t' - \varphi)\sin\theta\cos\varphi -$$

$$- (\cos\theta\, \bar{e}_r - \sin\theta\, \bar{e}_\theta)\sin(\omega t' - \varphi)\sin\theta\cos\varphi =$$

$$= \cos\varphi\cos^2\theta\sin(\omega t' - \varphi)\bar{e}_\theta - \sin\varphi\cos\theta\sin(\omega t' - \varphi)\bar{e}_\varphi +$$

$$+ \sin\varphi\sin^2\theta\cos\varphi\cos\theta\, \bar{e}_r\cos(\omega t' - \varphi) - \sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta\cdot$$

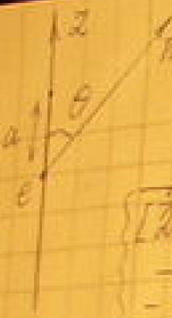
$$\cdot\cos(\omega t' - \varphi)\bar{e}_\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\cos\theta\cos(\omega t' - \varphi)\bar{e}_r -$$

$$- \cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta\cos(\omega t' - \varphi)\bar{e}_\varphi + \cos\varphi\sin^2\theta\sin(\omega t' - \varphi)\bar{e}_\theta =$$

$$= \cos\varphi\sin(\omega t' - \varphi)\vec{e}_\theta - \sin\theta\cos\theta\cos(\omega t' - \varphi)\bar{e}_\varphi -$$

$$- \sin\varphi\cos\theta\sin(\omega t' - \varphi)\bar{e}_\varphi$$

4.4.



$\bar n$ $a \ll c/\omega$, e, ω, a.

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}\cdot\frac{1}{36c^2}[\dddot{D}\bar n]^2 d\Omega$$

$$\overline{[\dddot{D} \bar n]^2} = \dddot{D}^2 - \overline{(\dddot{D} \bar n)^2} = \dddot{D}_\alpha \dddot{D}_\alpha -$$

$$- \overline{\dddot{D}_\alpha n_\alpha \dddot{D}_\beta n_\beta} = \dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\gamma}\overline{n_\beta n_\gamma} -$$

$$- \dddot{D}_{\alpha\gamma}\dddot{D}_{\beta\delta}\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = \frac{1}{3}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\gamma} -$$

$$- \frac{1}{15}\dddot{D}_{\alpha\gamma}\dddot{D}_{\beta\delta}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) =$$

$$= \frac{1}{3}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\beta} - \frac{1}{15}\dddot{D}_{\alpha\delta}\dddot{D}_{\delta\alpha} - \frac{1}{15}\cancel{\dddot{D}_{\alpha\alpha}\dddot{D}_{\beta\beta}}^{\,0} -$$

$$- \frac{1}{15}\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\beta\alpha} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{15}\right)\dddot{D}^2_{\alpha\beta} = \frac{1}{5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}$$

$$\bar I = \frac{1}{180c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}$$

$D_{\alpha\beta} = e(3x_\alpha x_\beta - x^2\delta_{\alpha\beta})$, $D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}$

$D_{zz} = e(3z^2 - z^2) = 2ez^2$,

$z^2 = a^2\cos^2\omega t'$, $\dot{D}_{zz} = -2e\cdot 2a^2\omega\cos\omega t'\sin\omega t' =$

$= -2a^2\omega e\sin 2\omega t'$, ..., $\dddot{D}_{zz} = 8ea^2\omega^3\sin\omega t'$

$\dddot{D}^2_{\alpha\beta} = \frac{3}{2}\dddot{D}^2_{zz} \Rightarrow \bar I_q = \frac{1}{180c^5}\cdot\frac{3}{2}\cdot 64e^2a^4\omega^6\overline{\sin^2\omega t'} =$

$= \frac{4}{15c^5}e^2a^4\omega^6$.

$$\bar I_q = \frac{4}{15}\frac{e^2a^4\omega^6}{c^5}$$

Частота кв. излучения в 2 раза больше частоты дипольного излучения.

$$\frac{\bar I_q}{\bar I_d} = \frac{4}{15}\frac{e^2a^4\omega^6}{c^5}\cdot\frac{3c^3}{e^2a^2\omega^4} = \frac{4}{5}\frac{a^2\omega^2}{c^2},$$

4.1

$a \ll \frac{c}{\omega}$, e, ω, a

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3}[\bar w \bar n]^2 d\Omega,$$

$$\bar w = -\omega^2\bar r = -\omega^2 a\cos\omega t'\bar k,$$

$$dI = \frac{e^2a^2\omega^4}{4\pi c^3}\cos^2\omega t'[\bar n'\bar n]^2 d\Omega,$$

где $\bar n' = \{0, 0, 1\}$, $\bar n = \{\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\}$

$[\bar n'\bar n]^2 = \sin^2\theta \Rightarrow dI = \frac{e^2a^2\omega^4}{8\pi c^3}\sin^2\theta\, d\Omega$,

$\int\sin^2\theta\, d\Omega = 4\pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}$.

$$\bar I = \frac{e^2a^2\omega^4}{3c^3}$$

$$\bar H = \frac{1}{c}[\dot{\bar A}\bar n] = \frac{e}{c^2R}[\bar w\bar n] = -\frac{e\omega^2 a}{c^2R}[\bar n'\bar n]\cdot\cos\omega t'$$

$$\begin{pmatrix}\bar i\\ \bar j\\ \bar k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\\ \sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar e_r\\ \bar e_\theta\\ \bar e_\varphi\end{pmatrix}$$

$$[\bar n'\bar n] = \begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ 0 & 0 & 1\\ n_1 & n_2 & n_3\end{vmatrix} = -\bar i n_2 + \bar j n_1 =$$

$= -(\cos\varphi\sin\theta\,\bar e_r + \cos\varphi\cos\theta\,\bar e_\theta - \sin\varphi\,\bar e_\varphi)\sin\theta\sin\varphi +$

$+ (\sin\varphi\sin\theta\,\bar e_r + \sin\varphi\cos\theta\,\bar e_\theta + \cos\varphi\,\bar e_\varphi)\sin\theta\cos\varphi =$

$= \sin\theta\,\bar e_\varphi$,

$$\bar H = -\frac{e\omega^2 a}{c^2R}\sin\theta\,\bar e_\varphi\,\mathrm{Re}\{\exp(-i\omega t')\}.$$

Поляризация линейная.

Вдоль оси Oz ($\theta = 0, \pi$) волны не излучаются.

где $\overline{[\bar n''\bar n]^2} = \overline{(\bar n'')^2} - \overline{(\bar n''\bar n)^2}$, $\bar n'' = \{0, 0, \cos\omega t'\}$

4.5.

e, a, ω.

$\bar d = \bar 0$, $\bar m = \bar 0$.

$D_{\alpha\beta} = \sum_a e_a (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})$

Рассмотрим в общем случае: $\alpha\ \forall$.

$D_{xx} = e(3a^2\cos^2\omega t' - a^2 + 3a^2\cos^2(\omega t'-\alpha) - a^2) =$

$= ea^2(3\cos^2\omega t' - 2 + 3\cos^2(\omega t'-\alpha)) =$

$= ea^2(2\cos^2\omega t' - \sin^2\omega t' + 2\cos^2(\omega t'-\alpha) -$

$- \sin^2(\omega t'-\alpha)) = ea^2(\frac{3}{2}(1+\cos 2\omega t') - 2 +$

$+\frac{3}{2}(\cos 2(\omega t'-\alpha)+1)) = ea^2(3-2+\frac{3}{2}\cos 2\omega t' +$

$+\frac{3}{2}\cos 2(\omega t'-\alpha)) = ea^2(3\cos(2\omega t'-\alpha)\cos\alpha + 1)$.

$D_{yy} = ea^2(1-3\cos(2\omega t'-\alpha)\cos\alpha)$.

$D_{zz} = -2ea^2$

$D_{yx} = D_{xy} = \sum_a 3e_a xy = 3ea^2(\cos\omega t'\sin\omega t' + \cos(\omega t'-\alpha)\cdot$

$\sin(\omega t'-\alpha)) = 3ea^2\sin(2\omega t'-\alpha)\cos\alpha$.

$D_{yz} = D_{xz} = 0$.

$\bar D = \vec e_x(D_{xx}n_x + D_{xy}n_y) + \vec e_y(D_{yy}n_y + D_{yx}n_x) +$

$+\bar e_z(D_{zz}n_z) = ea^2[3\cos(2\omega t'-\alpha)\cos\alpha+1)\cdot$

$\cdot\cos\varphi\sin\theta + 3\sin(2\omega t'-\alpha)\cos\alpha\cdot\sin\varphi\sin\theta]\bar e_x$

$+ea^2[(1-3\cos(2\omega t'-\alpha)\cos\alpha)\cdot\sin\varphi\sin\theta +$

$+3\sin(2\omega t'-\alpha)\cos\alpha\cos\varphi\sin\theta]\bar e_y + [-2ea \ldots$

$(\cos(2\omega t'-\alpha))''' = 8\omega^3\sin(2\omega t'-\alpha)$,

$(\sin(2\omega t'-\alpha))''' = -8\omega^3\cos(2\omega t'-\alpha)$.

$\dddot{\bar D} = ea^2\{(24\omega^3\sin(2\omega t'-\alpha)\cos\alpha\cos\varphi\sin\theta -$

$-24\omega^3\cos(2\omega t'-\alpha)\cos\alpha\sin\varphi\sin\theta)\bar e_x -$

$-(24\omega^3\sin(2\omega t'-\alpha)\cos\alpha\sin\varphi\sin\theta + 24\cos(2\omega t'-\alpha)\cdot$

$\cdot\cos\alpha\cos\varphi\sin\theta\cdot\omega^3)\bar e_y\}. = ea^2\{24\omega^3\cos\alpha\sin\theta\cdot$

$\cdot\sin(2\omega t'-\alpha-\varphi)\bar e_x - 24\omega^3\cos\alpha\sin\theta\cos(2\omega t'-\alpha-\varphi)\bar e_y\}$

$= 24ea^2\omega^3\cos\alpha\sin\theta\{\bar e_x\sin(2\omega t'-\alpha-\varphi)$

$-\bar e_y\cos(2\omega t'-\alpha-\varphi)\}$.

$[\dddot{\bar D}\bar n]$ – ?

$\dddot{\bar D} = \{\sin(2\omega t'-\alpha-\varphi)(\cos\varphi\sin\theta\,\bar e_r + \cos\varphi\cos\theta\,\bar e_\theta -$

$-\sin\varphi\,\bar e_\varphi) - \cos(2\omega t'-\alpha-\varphi)(\sin\varphi\sin\theta\,\bar e_r + \sin\varphi\cos\theta\,\bar e_\theta +$

$+\cos\varphi\,\bar e_\varphi)\}\,24\omega^3 ea^2\omega^3\cos\alpha\sin\theta$

$\dddot{\bar D} = 24\omega^3 ea^2\omega^3\cos\alpha\sin\theta\{\sin(2\omega t'-\alpha-2\varphi)\sin\theta;$

$\sin(2\omega t'-\alpha-2\varphi)\cos\theta;\ -\cos(2\omega t'-\alpha-2\varphi)\}$.

$[\dddot{\bar D}\bar n] = 24\omega^3 ea^2\omega^3\cos\alpha\sin\theta\,[\bar v\bar n] =$

$= 24\omega^3 ea^2\cos\alpha\sin\theta\{-v_\theta\,\bar e_\varphi + v_\varphi\,\bar e_\theta\}$

$(-\bar e_\varphi\sin(2\omega t'-\alpha-2\varphi)\cos\theta + \bar e_\theta\cos(2\omega t'-\alpha-2\varphi))$

$dI = \frac{24^2\omega^6 e^2 a^4\cos^2\alpha\sin^2\theta}{4\pi c^3\cdot 36c^2}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)\,d\Omega$.

Т.к. $\alpha = \pi \Rightarrow \cos^2\alpha = 1$

$$\overline{dI} = \frac{2e^2a^4\omega^6}{\pi c^5}\sin^2\theta\,(1+\cos^2\theta)\,d\Omega.$$

$$\left\{ \int \sin^2\theta\,(1+\cos^2\theta)\,d\Omega = \int (1-\cos^4\theta)\,d\Omega = \frac{16}{5}\pi. \right.$$

$$\bar{I} = \frac{32}{5}\,\frac{e^2a^4\omega^6}{c^5}$$

Частота излучения 2ω.

(4.6) Оцените, при каком угле $\varphi = \pi - \alpha$ инт-сти $E1$ и $E2$ излучений в 4.5. будут одинаковы.

Инт-сть $E1$:

$$\bar{d} = ea\{\cos\omega t' + \cos(\omega t' - \alpha);\ \sin\omega t' + \sin(\omega t' - \alpha);\ 0\}$$

$$= ea\cos\frac{\alpha}{2}\left\{\cos\left(\omega t' - \frac{\alpha}{2}\right);\ \sin\left(\omega t' - \frac{\alpha}{2}\right);\ 0\right\}$$

$$\ddot{\bar{d}} = -2ea\omega^2\cos\frac{\alpha}{2}\left\{\cos\left(\omega t' - \frac{\alpha}{2}\right);\ \sin\left(\omega t' - \frac{\alpha}{2}\right);\ 0\right\}$$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3}[\ddot{d}\bar{n}]^2$$

$$\overline{[\ddot{d}\bar{n}]^2} = \overline{\ddot{d}^2} - \overline{(\ddot{d}\bar{n})^2} = 4e^2a^2\omega^4\cos^2\frac{\alpha}{2}\Big\{1 -$$

$$-\overline{\left(\cos\left(\omega t' - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\theta\cos\varphi + \sin\left(\omega t' - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\theta\sin\varphi\right)^2}\Big\} =$$

$$= 4e^2a^2\omega^4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right) = 4e^2a^2\omega^4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+\cos^2\theta)$$

$$d\bar{I} = \frac{\omega^4e^2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\pi c^3}(1+\cos^2\theta)$$

$$\bar{I}_d = \frac{8}{3}\,\frac{\omega^4e^2a^2}{c^3}\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\bar{I}_q = \frac{32}{5}\,\frac{e^2a^4\omega^6}{c^5}\cos^2\alpha$$

$\bar{I}_d = \bar{I}_q \Leftrightarrow \dfrac{\dots}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\dots}{5}\,\dfrac{\dots}{c^2}$

Если $\alpha \to 0$, то $E2 \ll E1$; если $\alpha \to \pi$, то $E1 \ll E2$ (при $\alpha = \pi$ $E1 = 0$.) Поэтому искомый угол близок к π $\Rightarrow \alpha \in II,\ \frac{\alpha}{2} \in I$

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = -\sqrt{\frac{12}{5}}\cdot\frac{a\omega}{c}$$

Если $\alpha = \pi - \varphi$, то $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos(\pi - \varphi)} \approx \dfrac{\sin\frac{\varphi}{2}}{-1} \approx -\dfrac{\varphi}{2} =$

$$= -\sqrt{\frac{12}{5}}\cdot\frac{a\omega}{c}.$$

$$\varphi \approx 2\sqrt{\frac{12}{5}}\,\frac{a\omega}{c}.$$

(4.7) Эл. диполь $\bar{d}$ гармонически колеблется вдоль своей оси (оставаясь $\parallel$ самому себе) с a и ω.

$$\dot{\bar{d}} = \ddot{\bar{d}} = 0,$$

$$\bar{A} = \frac{1}{c^2R}\frac{\partial}{\partial t'}\int \bar{j}_{t' + \frac{\bar{r}\bar{n}}{c}}(\bar{r}\bar{n})\,dV = \frac{1}{c^2R}\frac{\partial}{\partial t'}\sum_i e_i(\bar{n}\bar{r}_i)\bar{v}_i$$

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}[\dot{\bar{A}}\bar{n}]^2R^2\,d\Omega.$$

Диполь движется как целое, поэтому

$$\bar{A} = \frac{1}{c^2R}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\sum_i e_i(\bar{n}\bar{r}_i)\bar{v} = \frac{\bar{d}\bar{n}}{c^2R}\dot{\bar{v}},\quad \dot{\bar{A}} = \frac{\bar{d}\bar{n}}{c^2R}\ddot{\bar{v}},$$

где $\ddot{\bar{v}} = \{0, 0, \dddot{z}\}$.

$$dI = \frac{(\bar{d}\bar{n})^2}{4\pi c^5}\dddot{z}^2[\bar{k}\bar{n}]^2\,d\Omega,$$

$$\overline{\dddot{z}^2} = a^2\omega^6\,\overline{\sin^2\omega t'},$$

$$d\bar{I} = \frac{d^2\omega^6a^2}{4\pi c^5}\cdot\frac{1}{2}(\bar{k}\bar{n})^2[\bar{k}\bar{n}]^2\,d\Omega.$$

$[\vec{e}\vec{n}]^2 = 1 - (\vec{e}\vec{n})^2 = 1 - \cos^2\theta.$

$(\vec{d}\vec{n})^2 = d^2(\vec{e}\vec{n})^2 = d^2\cos^2\theta.$

$$d\bar{I} = \frac{d^2\omega^6 a^2}{8\pi c^5}\cos^2\theta\,(1-\cos^2\theta)\,d\Omega.$$

$$\left\{ \int(\cos^2\theta - \cos^4\theta)\,d\Omega = \frac{4\pi}{3} - 3\frac{4\pi}{15} = \frac{8}{15}\pi. \right.$$

$$\bar{I} = \frac{d^2\omega^6 a^2}{15c^5}$$

Энергия, излученная за период:

$$\Delta E = \int_0^T I\,dt' = \frac{2d^2\omega^6 a^2}{15c^5}\int_0^T \sin^2\omega t'\,dt' =$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$= \frac{2d^2\omega^6 a^2}{15c^5}\cdot\frac{1}{2}T = \frac{2d^2\omega^5 a^2\pi}{15c^5}$$

Задание 5. Излучение частиц при столкновении.

5.1. Частица e, m налетает из ∞ на неподвиж. кулоновский центр с q того же знака. Столкновение лобовое, скорость на ∞ v_0. ? полн. эн. излуч. за все $t_{ст}$.

$$\Delta E = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\,dt = \frac{4}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_0^{\infty} w^2\,dt =$$

$w = \frac{eq}{mr^2}$

$$= \frac{4}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_0 w\,dv = \frac{4}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_0^{v_0}\frac{eq}{mr^2}\,dv.$$

Т.к. $\frac{mv^2}{2} + \frac{eq}{r} = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{m}{2eq}(v_0^2 - v^2)$

$$\Delta E = \frac{em}{3qc^3}\int_0^{v_0}(v_0^2 - v^2)^2\,dv$$

$$\left\{ \int_0^{v_0}(v_0^4 - 2v_0^2v^2 + v^4)\,dv = v_0^4 v_0 - \frac{2}{3}v_0^2 v_0^3 + \frac{v_0^5}{5} = v_0^5\left(\frac{15-10+3}{15}\right) = \frac{8}{15}v_0^5. \right.$$

$$\Delta E = \frac{8}{45}\frac{e}{q}\frac{mv_0^5}{c^3}$$

5.2. Нерелят. частица e, m рассеивается в кулон. поле ∞ тяжелого силового центра (Q) с прицельным расст. a, обеспечивающим малость отклонения, $mv_0^2 \gg \frac{eQ}{a}$ (периферическое рассеяние). v_0 – скорость на ∞.

Т.к. $F \sim \frac{eQ}{a^2}$, $\Delta t \sim \frac{a}{v}$ $\Rightarrow$ $\frac{eQ}{amv^2} \ll 1$ озна-
чает, что $\frac{F}{mv}\Delta t = \frac{dp}{p} \ll 1$.

$w = \frac{eQ}{mr^2}$ $\quad \Delta E = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\, dt = \frac{2}{3}\frac{e^4Q^2}{m^2c^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{r^4}$.

Пусть $x = v_0 t$; т.к. $\frac{dp}{p} \ll 1$, то

$dx = v_0\, dt \Rightarrow$

$$\Delta E = \frac{2}{3}\frac{e^4Q^2}{m^2c^3v_0}\int\frac{dx}{r^4} = \frac{2}{3}\frac{e^4Q^2}{m^2c^3v_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{a}{a^4}\cos^2\theta\, d\theta =$$

$\left\{ x = a\,tg\,\theta,\quad dx = +a\frac{d\theta}{\cos^2\theta},\quad r = \frac{a}{\cos\theta} \right.$

$$= \frac{2}{3}\frac{e^4Q^2}{m^2c^3v_0a^3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{e^4Q^2}{3m^2c^3v_0a^3}.$$

5.3. Нерелят. частица e, m движется в одн. постоянном магн. поле $\vec{H}$. Найти время в течение к-ого энергия частицы уменьшится в 10 раз вслед-е излучения.

$m\dot{\vec v} = \frac{e}{c}[\vec v \vec H] = \frac{e}{c} v H \sin\theta = \frac{e}{c} v H$,

$\mathcal{I} = \frac{2}{3c^3}|\ddot{\vec d}|^2 = \frac{2e^2}{3c^3}|\dot{\vec v}|^2 = \frac{2}{3}\frac{e^4H^2v^2}{c^5m^2}$

$\mathcal{I} = \frac{dW}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dW}{\mathcal{I}} \Rightarrow$

$$t = \int_0^t dt = -\frac{1}{\mathcal{I}}\int_{W_0}^{W_0/n} dW = +\frac{1}{\mathcal{I}}\cdot\frac{W_0(n-1)}{n} = \frac{3}{2}\frac{c^5m^2}{e^4H^2v^2}\frac{W_0(n-1)}{n}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{c^5m^3}{e^4H^2}\cdot\frac{n-1}{n}$$

т.к. $W_0 = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow \frac{W_0}{v^2} = \frac{m}{2}$

$$t = \frac{27}{40}\cdot\frac{m^3c^5}{H^2e^4}.$$

5.4.

а) Оценить число оборотов и время жизни атома в модели Резерфорда, считая $v \ll c$, если радиус орбиты $a = 0.5\cdot10^{-8}$ см, $m = 0.9\cdot10^{-27}$ г, $e = 4.8\cdot10^{-10}$ абс. ед.

Б/ считать, что в $\forall$ момент падения на ядро e^- движется по окружности равномерно

$\mathcal{I} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2w^2}{c^3} = \frac{2}{3}\frac{e^2\cdot e^4}{c^3m^2r^4}$

По теореме Вириала: $\mathcal{E} = -\frac{e^2}{2r}$

$\frac{e^2}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{2e^6}{3m^2c^3}\left(\frac{1}{r}\right)^4$,

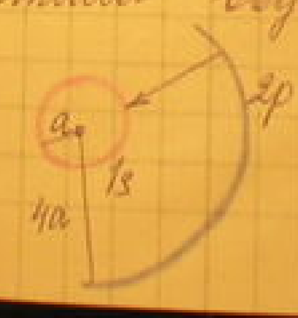
$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{4e^4}{3m^2c^3}\frac{1}{r^4}$, $\quad r^2dr = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}dt$,

$\left.\frac{r^3}{3}\right|_a^0 = -\frac{4e^4}{3m^2c^3}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{4}\frac{m^2c^3a^3}{e^4}$

Время жизни $\Delta t = \frac{(0.9)^2 10^{-54}(3)^3 10^{30}(0.5)^3 10^{-24}}{(3)^4\cdot 4\cdot(4.8)^4\cdot 10^{-40}} =$

$= 3.2\cdot 10^{-13}$ с.

б) Определить вероятность перехода атома водорода из 2p в 1s.



$\mathcal{I} = -\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2w^2}{c^3} = \frac{2}{3}\frac{e^6}{c^3m^2r^4}$.

По теореме о вириале: $\mathcal{E} = -\frac{e^2}{2r}$

$$\frac{e^2}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{2}{3}\frac{e^6}{m^2c^3}\left(\frac{1}{r}\right)^4,$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}\frac{1}{r^4},$$

$$\frac{r^3}{3}\Big|_{r_1}^{r_2} = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}\Delta t,$$

$$63a^3 = 4\frac{e^4}{m^2c^3}\Delta t.$$

Вероятность: $W \approx \frac{1}{\Delta t} = \frac{4}{63}\frac{e^4}{m^2c^3a^3} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 2^4\frac{c}{a}$,

$$a = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

Задание 6. Рассеяние эл/м волн. Сила лучистого трения.

6.1

Пренебрегая неоднородностью эл. поля в обл., занятой осциллятором, и действием м. силы — эффектами порядка β, ур-е движения заряж. осц-ра:

$$\ddot{\vec r} + \omega_0^2\vec r = \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\vec r} + \frac{e}{m}\vec E_0 e^{-i\omega t}$$

Решение: $\vec r = \vec r_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow$

$$-\vec r_0\omega^2 + \omega_0^2\vec r_0 = i\frac{2e^2}{3mc^3}\omega^3\vec r_0 + \frac{e}{m}\vec E_0$$

$$\vec r_0 = \frac{e}{m}\frac{\vec E_0}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma} = r_e\frac{c^2}{e}\frac{\vec E_0}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma},$$

где $\gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}$, $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$.

$$\vec r = \vec r_0\cos\omega t = \tilde r_0\cos\omega t\cdot\vec n', \quad \vec n' = \{0; 0; 1\}$$

$$\frac{d\bar I}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3}\overline{|e\ddot{\vec r}\times\vec n|^2} = \frac{1}{8\pi c^3}\tilde r_0^2 e^2\omega^4|\vec n'\times\vec n|^2$$

$$[\vec n'\vec n]^2 = 1-(\vec n'\vec n)^2 = 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\bar S}\frac{d\bar I}{d\Omega}$, $\bar S = \frac{cE_0^2}{8\pi}$ — плотность потока, усредн. по t.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{8\pi}{cE_0^2}\frac{1}{8\pi c^3}r_e^2\frac{c^4}{e^2}e^2\omega^4\frac{E_0^2\sin^2\theta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} =$$

$$= \frac{r_e^2\omega^4\sin^2\theta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}$$

$$\sigma = \int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \frac{8\pi}{3}\frac{r_e^2\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}.$$

6.2 Пусть $\bar{H} = \{0, 0, H\}$, $\omega_L = \frac{eH}{mc} \ll \omega_0$.

$$m\ddot{\bar{r}} + m\omega_0^2 \bar{r} = \frac{e}{c}[\dot{\bar{r}}\bar{H}].$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eH}{mc}\dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{eH}{mc}\dot{x}, \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Из 1 и 2: $\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -i\frac{eH}{mc}\dot{\xi}$, $\xi = x + iy$

$$z = z_0 e^{i\omega_0 t}, \quad \xi = \xi_0 e^{i\omega t} \Rightarrow -\omega^2 + \omega_0^2 = \omega_L \omega,$$

$$\omega^2 + \omega_L\omega - \omega_0^2 = 0, \quad \omega = \frac{-\omega_L \pm \sqrt{\omega_L^2 + 4\omega_0^2}}{2} =$$

$$= -\frac{\omega_L}{2} \pm \frac{2\omega_0}{2}\sqrt{1 + \frac{\omega_L^2}{4\omega_0^2}} = -\frac{\omega_L}{2} \pm \omega_0\left(1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\omega_L}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Т.к. $\omega_L \ll \omega_0$, то $\omega = \omega_0 \pm \omega_L$

$$\bar{r} = A_1(\bar{e}_x + i\bar{e}_y)e^{i(\omega_0 - \omega_L)t} + A_2(\bar{e}_x - i\bar{e}_y)e^{i(\omega_0 + \omega_L)t} +$$

$$+ A_3\bar{e}_z e^{i\omega_0 t}, \quad A_i \text{ - const интегрирования}$$

Видно, что осц-р в м/поле становится анизотропным, частота его колебаний расщепляется на 3 частоты: ω_0 и $\omega_0 \pm \omega_L$.

Вдоль Oz наблюдаются 2 спектр. линии, поляризов. по кругу в против. стороны. В перпенд. к полю направлении наблюд. все 3 монохром. компоненты, поляризованные линейно. При этом вектор эл. поля несмещенной спектр. линии колебл. в направл. м/поля, вектора же эл./поля у обеих смещ. линий колеблются в перп. направлении.

6.3 Импульс фотона $\bar{p} = \hbar\bar{k} = \frac{E}{\omega}\cdot\frac{\omega}{c}\bar{n} = \frac{E}{c}\bar{n}$

$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{dE}{\dots} = \dots \frac{1}{\dots}\bar{n} = \dots$

Задание 8. Преобразование Лоренца.

8.1 Пусть S' движется отн-но S с произвольно направленной скор. $\bar{V}$

$$\bar{r}_{\parallel} = \bar{V}\frac{(\bar{r}\bar{V})}{V^2}, \quad \bar{r}'_{\parallel} = \bar{V}\frac{(\bar{r}'\bar{V})}{V^2},$$

$$\bar{r}_{\perp} = \bar{r} - \bar{r}_{\parallel}, \quad \bar{r}'_{\perp} = \bar{r}' - \bar{r}'_{\parallel}.$$

$$\bar{r}_{\parallel} = \frac{\bar{r}'_{\parallel} + \bar{V}t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \bar{r}_{\perp} = \bar{r}'_{\perp}.$$

$$\bar{r} = \underbrace{\bar{V}\frac{(\bar{r}\bar{V})}{V^2}}_{\bar{r}_{\parallel}} - \underbrace{\frac{[\bar{r}\times\bar{V}]\times\bar{V}}{V^2}}_{-\bar{r}_{\perp}} = \frac{\bar{r}'_{\parallel} + \bar{V}t'}{\sqrt{1-\beta^2}} -$$

$$- \frac{[\bar{r}'\times\bar{V}]\times\bar{V}}{V^2} = \frac{\bar{r}' + \bar{V}t'}{\sqrt{1-\beta^2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\frac{[\bar{r}'\times\bar{V}]\times\bar{V}}{V^2}.$$

8.2

Введем формально 4-вектор k^i:

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \bar{k}\right).$$

Фаза: $\alpha = k^i x_i = \omega t - \bar{k}\bar{r} = const.$

$$k^0 = \frac{k^{0\prime} + \frac{v}{c}k^{1\prime}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\omega}{c} \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{\omega' + vk^{1\prime}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Если написать $k^{1\prime} = \frac{\omega'}{c}\cos\theta'$, $\cos\theta'$ – направляющий косинус $\bar{k}'$.

$$\omega = \frac{\omega'(1+\beta\cos\theta')}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

$$k^1 = \frac{\omega}{c}n^1 = \frac{k^{1\prime} - k^{0\prime}\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\frac{\omega'}{c}\cos\theta' + \frac{v}{c^2}\omega'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

8.3

Аберрация – явление отклонения света при переходе к другой системе отсчета.

Пусть скорость частицы в S: $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta$; в S': $v'_x = v'\cos\theta'$, $v'_y = v'\sin\theta'$, тогда

$$tg\,\theta = \frac{v'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\sin\theta'}{v'\cos\theta' + V} -$$

определяет изменение напр-я скорости при переходе от одной сист. к другой.

В нашем случае $v = v' = c \Rightarrow$

$$tg\,\theta = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta + \cos\theta'}\sin\theta'.$$

Если $V \ll c$, то $\sin\theta - \sin\theta' = -\frac{V}{c}\sin\theta'\cos\theta'$.

Угол аберрации $\Delta\theta = \theta' - \theta = \frac{V}{c}\sin\theta'$.

8.5

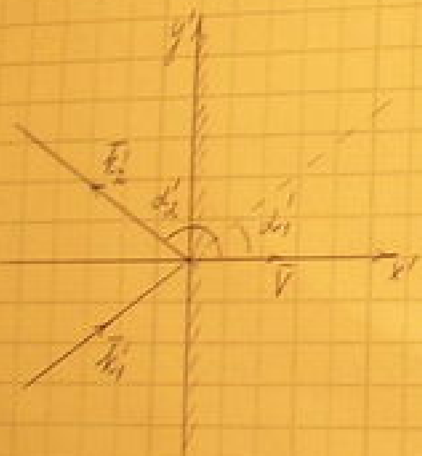
Из 8.2 $\omega = \frac{\omega'(1+\beta\cos\theta')}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \frac{V}{c}$,

ω' – част., измеренная в СО, движ. вместе с ист. излучения

$$|\cos\theta'| \le 1 \Rightarrow \omega'\gamma(1-\beta) \le \omega \le \omega'\gamma(1+\beta).$$

частота движ. ист.

8.6



S' связана с зеркалом

В S' выполн. з-н отражения:

$$\omega_1' = \omega_2' = \omega', \quad \alpha_2' = \pi - \alpha_1'$$

$$\Rightarrow \cos\alpha_2' = -\cos\alpha_1'$$

$$\cos\alpha_2 = -\frac{(1+\beta^2)\cos\alpha_1 - 2\beta}{1 - 2\beta\cos\alpha_1 + \beta^2},$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{1 - 2\beta\cos\alpha_1 + \beta^2}{1-\beta^2}.$$

8.7 Из 8.2 следует:

$$\omega = \frac{\omega' + Vk_x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\omega' + \omega'\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \lambda' = \frac{2\pi c}{\omega'}$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\omega}{\omega'} = \frac{1+\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\lambda' = \frac{\lambda(1+\beta\cos\theta)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

8.8

$$\varphi = \frac{e}{R^*}, \quad \bar A = e\frac{\bar V}{cR^*}, \quad R^* = \sqrt{(x-Vt)^2 + (1-\beta^2)\cdot(y^2+z^2)}$$

[$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e}{R'\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$R': \quad x' = \frac{x-Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

$$R'^2 = \frac{(x-Vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$]

$$E_x = E_x' = \frac{ex'}{R'^3}, \quad E_y = \frac{E_y'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ey'}{R'^3\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$E_z = \frac{E_z'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{ez'}{R'^3\sqrt{1-\beta^2}}$$ (в отсут. м/поля).

$$\Rightarrow \bar E = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{e\bar R}{R^{*3}}, \quad \bar R = \sqrt{(x-Vt)^2 + y^2 + z^2}$$

$$R^{*2} = R^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right) \Rightarrow \bar E = \frac{e\bar R}{R^3}\frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

$$\bar H = \frac{1}{c}[\bar V\bar E]$$

8.9.

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\bar d\,\bar r'}{r'^3\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x' = \frac{x-Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \Rightarrow \bar r^* = \{x - Vt, \sqrt{1-\beta^2}\,y, \sqrt{1-\beta^2}\,z\};$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\bar d\,\bar r^*}{r^{*3}}\sqrt{1-\beta^2}, \quad \bar A = \frac{\bar V}{c}\varphi.$$