05.09.05 **Лекция 1.**

Лукьянов Лев Григорьевич. 237Л46.

Название „небесная механика" ввел Лаплас.

Теоретическая астрономия изучает движение реально существующих тел. Небесная механика – абстракция.

Литература.

1) Дубошин Г.Н. „Небесная механика. Основные задачи и методы"

2) Субботин М.Ф. „Введение в теоретическую астрономию".

Дополнительная литература

* Аксёнов Е.П. „Теория движения искусственных спутников Земли".

Небесная механика, или теоретическая астрономия – раздел астрономии, изучающий поступательные и вращательные движения небесных тел.

Астродинамика – раздел небесной механики, изучающий движение искусственных небесных тел.

Разделы курса

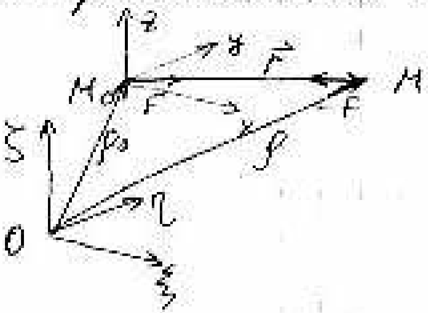
1) Невозмущённое движение (задача двух тел)

2) Возмущённое движение (задача многих тел)

Раздел I. Невозмущенное движение.

1) Общая задача (тела считаем точками; ньютоновский закон тяготения).

Ограниченная задача — когда масса одного из тел ничтожно мала по сравнению с другими.



$\vec F = f\frac{m_0 m \vec r}{r^3}$

Абсолютная система координат. O — неподвижная точка

$M_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$, $\vec\rho_0 = \{\xi_0, \eta_0, \zeta_0\}$

$M(\xi, \eta, \zeta)$, $\vec\rho = \{\xi, \eta, \zeta\}$

$r = \sqrt{(\xi-\xi_0)^2 + (\eta-\eta_0)^2 + (\zeta-\zeta_0)^2}$

$\vec r = \vec\rho - \vec\rho_0$

$$\boxed{\begin{aligned} m_0\frac{d^2\vec\rho_0}{dt^2} &= f\frac{m_0 m \vec r}{r^3} \\ m\frac{d^2\vec\rho}{dt^2} &= -f\frac{m_0 m \vec r}{r^3} \end{aligned}}$$

Регулярности нет, есть сингулярность.

$\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \dot\xi_0, \dot\eta_0, \dot\zeta_0, \xi, \eta, \zeta, \dot\xi, \dot\eta, \dot\zeta$ — эти 12 величин нужно выразить как функции $t, C_1, \dots, C_{12}$. Это общее решение.

$\xi_0^{(0)}, \eta_0^{(0)}, \dots, \dot\zeta^{(0)}$ — начальные условия.

$F(t, \xi_0, \eta_0, \dots, \dot\zeta^{(0)}) = C$ 1-й интеграл.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi_0}\dot\xi_0 + \dots + \frac{\partial F}{\partial \dot\zeta}\ddot\zeta \equiv 0$$

$$\left.\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_{12})}{D(\xi_0, \eta_0, \dots, \dot\zeta)}\right|_{(0)} \neq 0 \quad \text{(Якобиан)}$$

§2. Интегралы движения центра масс.

$$m_0\ddot{\vec\rho}_0 + m\ddot{\vec\rho} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_0\dot{\vec\rho}_0 + m\dot{\vec\rho}\right) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} m_0\dot{\vec\rho}_0 + m\dot{\vec\rho} &= \text{const} \\ m_0\vec\rho_0 + m\vec\rho &= \vec a t + \vec b \end{aligned}}$$

$\vec a = \{a_1, a_2, a_3\}$

$\vec b = \{b_1, b_2, b_3\}$

$$\boxed{\begin{aligned} (m_0+m)\vec\rho_G &= m_0\vec\rho_0 + m\vec\rho = \vec a t + \vec b \\ (m_0+m)\dot{\vec\rho}_G &= m_0\dot{\vec\rho}_0 + m\dot{\vec\rho} = \vec a \end{aligned}}$$

G — центр масс

§3. Уравнения относительного движения.

$O\xi\eta\zeta \to Mxyz$

$\vec r = \{x, y, z\}$ $\quad x = \xi - \xi_0$, $y = \eta - \eta_0$, $z = \zeta - \zeta_0$ $\qquad \ddot{\vec r} = \ddot{\vec\rho} - \ddot{\vec\rho}_0$

$$\boxed{\frac{d^2\vec r}{dt^2} = -f\frac{(m_0+m)\vec r}{r^3}}$$

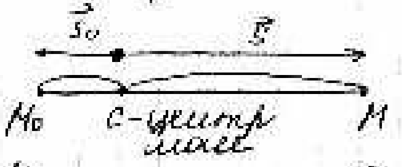
12.09.05 Лекция 2.

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{-f(m_0+m)\vec{r}}{r^3} \qquad (1)$$

Обобщённый вид

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \qquad (1')$$

$$\mu = \begin{cases} f(m_0+m) \\ f\,m_0 \\ f\,m_0^3/(m_0+m)^2 \\ f\,m^3/(m_0+m)^2 \end{cases}$$ (для ограниченной задачи или неподвижного центра)



Исходные уравнения:

$$\begin{cases} m_0\ddot{\vec{\rho}}_0 = f\dfrac{m_0 m\vec{r}}{r^3} = \dfrac{\partial U}{\partial \vec{\rho}_0} \\ m\ddot{\vec{\rho}} = -f\dfrac{m_0 m\vec{r}}{r^3} = \dfrac{\partial U}{\partial \vec{\rho}} \end{cases} \qquad (2)$$

Силовая функция

$$U = f\frac{m_0 m}{r}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}} = \left\{\frac{\partial U}{\partial \xi}; \frac{\partial U}{\partial \eta}; \frac{\partial U}{\partial \zeta}\right\} \quad (=\mathrm{grad}\, U)$$

$$\vec{r} = \vec{r}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Если известно $\vec{r}$, то как получить решение системы (2)?

$$\begin{cases} \vec{\rho} - \vec{\rho}_0 = \vec{r} \\ m\vec{\rho} + m_0\vec{\rho}_0 = \vec{a}t + \vec{b} \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m & m_0 \end{vmatrix} = m_0 + m \neq 0$$

§4. Интеграл площадей.

$$[\vec r \times \ddot{\vec r}] = -\frac{\mu}{r^3}[\vec r \times \vec r] = 0$$

$$\frac{d}{dt}[\vec r \times \dot{\vec r}] = 0$$

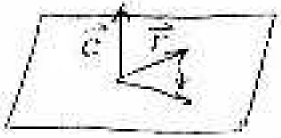
$[\vec r \times \dot{\vec r}] = \vec c$ ($\vec c$ — произвольная постоянная)

$\vec c = \{c_1, c_2, c_3\}$

$(\vec c \cdot \vec r) = (\vec r, [\vec r \times \dot{\vec r}]) = 0$

$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0 \Rightarrow$ движение происходит в плоскости

$\vec c \dot{\vec r} = \vec c \vec V = c_1 \dot x + c_2 \dot y + c_3 \dot z = 0$



$|\vec c|$ = площадь, которую заметает $\vec r$

§5. Интеграл энергии.

$\ddot{\vec r} = \frac{\partial U}{\partial \vec r}$ U — силовая функция (1'')

$U = \frac{\mu}{r}$

$((1)\cdot\dot{\vec r})$: $(\dot{\vec r}\ddot{\vec r}) = -\frac{\mu}{r^3}(\vec r \cdot \dot{\vec r})$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\vec r}^2) = \frac{d}{dt}(U)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right) = -\frac{\mu}{r^2}\cdot\frac{\vec r \cdot \dot{\vec r}}{r} = -\frac{\mu}{r^3}(\vec r \cdot \dot{\vec r})$$

$$\boxed{v^2 - \frac{2\mu}{r} = h} \qquad (4)$$

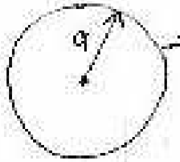
$\vec V = \{\dot x, \dot y, \dot z\}$ $v^2 \ge 0 \Rightarrow \frac{2\mu}{r} + h \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\frac{2\mu}{r} \ge -h}$ для $h > 0$

$\boxed{r \le \frac{2\mu}{-h} = a}$ для $h < 0$

↓

Движение происходит внутри некоторой сферы радиуса a.



На эту границу можно попасть только со скоростью = 0

§6. Интеграл Лапласа.

$((1') \times \vec c)$ $[\vec r \times \vec v] = \vec c$ (3)

$$[\ddot{\vec r} \times \vec c] = -\frac{\mu}{r^3}[\vec r \times \vec c]$$

$$\frac{d}{dt}[\dot{\vec r} \times \vec c] = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\vec r\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\vec r\right) = \frac{\mu}{r}\dot{\vec r} - \frac{\mu \vec r}{r^2}\cdot\frac{(\vec r \cdot \dot{\vec r})}{r} =$$

$$= \frac{\mu \dot{\vec r}}{r} - \frac{\mu}{r^3}\vec r(\vec r \cdot \dot{\vec r}) = \frac{\mu \dot{\vec r}(\vec r \vec r)}{r^3} - \frac{\mu \vec r(\vec r \dot{\vec r})}{r^3} =$$

$$= \frac{\mu}{r^3}[\vec r \times [\dot{\vec r} \times \vec r]] = -\frac{\mu}{r^3}[\vec r \times \vec c]$$

$$[\vec V \times \vec c] - \frac{\mu}{r}\vec r = \vec \lambda = const \qquad (5)$$

$\vec a = \{a_1, a_2, a_3\}$ $\vec c = \{c_1, c_2, c_3\}$

$\vec b = \{b_1, b_2, b_3\}$ h, $\vec \lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$

13 первых интегралов ⇒ есть зависимость

2 лишние константы, т.к. время не входит в явном виде (хотя должно).

$$\vec\lambda\vec c = \vec c(\vec v\times\vec c) - \frac{\mu}{r}\vec c\vec r = 0$$

$$\boxed{\vec\lambda\vec c = 0} \qquad (6)$$

$$\vec\lambda^2 = [\vec v\times\vec c]^2 + \frac{\mu^2}{r^2}\vec r^2 - \frac{2\mu}{r}(\vec r,[\vec v\times\vec c]) =$$

$$= v^2c^2\sin^2(\widehat{\vec v\vec c}) + \mu^2 + c^2 = v^2c^2 + \mu^2 - 2c^2\frac{\mu}{r} =$$

$$= \mu^2 + c^2\left(v^2 - \frac{2\mu}{r}\right)$$

$$\boxed{\lambda^2 = \mu^2 + hc^2} \qquad (7)$$

Не хватает интеграла, который содержит время.

$x, y, z, \dot x, \dot y, \dot z \quad \| \; c_1, c_2, c_3, h, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

5 независимых величин

Для относительного движения

$$\dot x = \dot x(\underbrace{c_1, \dots, \lambda_3}_{7-2}, x) = \varphi(x)$$

$$\dot x = \varphi(x)$$

$$\frac{dx}{\varphi(x)} = dt \Rightarrow \int\frac{dx}{\varphi(x)} = t - \tau \qquad (8)$$

τ – недостающая константа

$$\vec\lambda\vec r = (\vec r\,\underbrace{[\vec v\times\vec c]}_{\vec c[\vec r\times\vec v]}) - \frac{\mu}{r}(\vec r\cdot\vec r) = \vec c^{\,2} - \mu r$$

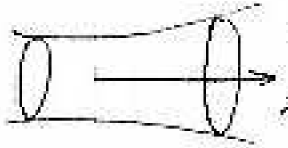
$$\boxed{\vec\lambda\vec r = \vec c^{\,2} - \mu r} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} \lambda_1x + \lambda_2y + \lambda_3z = c^2 - \mu r & \text{ур-ие пов-ти II пор.} \\ \lambda_1x + \lambda_2y + \lambda_3z = d & \text{ур-ие плоскости} \perp \vec\lambda \end{cases}$$

Делаем сечения плоскостью поверхности

$d = c^2 - \mu r, \quad r = \dfrac{c^2 - d}{\mu} = const$

Сечение = окружности



поверхность вращения

λ-const (главная ось)

$c \perp \lambda$

§6 Орбитальная система координат.

$O\xi\eta\zeta \to M_0xyz \to M_0\xi\eta\zeta$

это наша старая система $O\xi\eta\zeta$

Делаем поворот

$M_0\xi \to$ по $\vec\lambda$

$M_0\zeta \to$ по $\vec c$

$M_0\xi\eta$ – плоскость движения тела M.

$M_0\eta$ – так, чтобы получилась правая тройка.

	$\vec e_\lambda$ ξ	$\vec e_{\lambda'}$ η	$\vec c^{\,*}$ ζ
x	α_λ	$\alpha_{\lambda'}$	α^*
y	β_λ	$\beta_{\lambda'}$	β^*
z	γ_λ	$\gamma_{\lambda'}$	γ^*

$\vec{\lambda}^0 = \vec{e}_r$

$\vec{c}^0 = \vec{e}^*$

$\vec{\eta}^0 = \vec{e}_r{}' = [\vec{e}^* \times \vec{e}_r]$

$\vec{e}_r = \{\alpha_r, \beta_r, \gamma_r\}$

$\vec{e}_r{}' = \{\alpha_r', \beta_r', \gamma_r'\}$

$\vec{e}^* = \{\alpha^*, \beta^*, \gamma^*\}$

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = A \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Vmatrix}$$

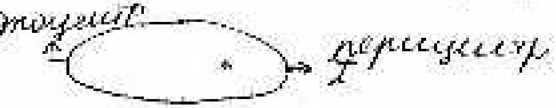
$$A = \begin{Vmatrix} \alpha_r & \alpha_r' & \alpha^* \\ \beta_r & \beta_r' & \beta^* \\ \gamma_r & \gamma_r' & \gamma^* \end{Vmatrix}$$

$\vec{\lambda}^0 = \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{\lambda_2}{\lambda}, \frac{\lambda_3}{\lambda} \right\}$

$\vec{c}^0 = \left\{ \frac{c_1}{c}, \frac{c_2}{c}, \frac{c_3}{c} \right\}$

$\vec{e}_r{}' = \left\{ \frac{c_2\lambda_3 - c_3\lambda_2}{c\lambda}, \frac{c_3\lambda_1 - c_1\lambda_3}{c\lambda}, \frac{c_1\lambda_2 - c_2\lambda_1}{c\lambda} \right\}$

$\vec{r} = r\vec{e}, \quad \vec{e} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$



$\vec{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{\lambda, 0, 0\}$

$\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\} = \{0, 0, c\}$

$\vec{r} = \{x, y, z\} = \{\xi, \eta, 0\}$

$$\left.\begin{aligned} \lambda\xi &= c^2 - \mu r \\ \zeta &= 0 \end{aligned}\right\}$$ $\leftarrow (\vec{\lambda}\vec{r} = c^2 - \mu r)$ → уравнение орбиты

$r = \frac{c^2 - \lambda\xi}{\mu}$

$O\xi'\eta'\zeta \to M_0xyz \to M_0\xi\eta\zeta \to \underline{Mrv\zeta}$ цилиндрическая СК

$\xi = r\cos v$

$\eta = r\sin v$

$\zeta = \zeta$

$\mu r = c^2 - r\lambda\cos v$

$r(\mu + \lambda\cos v) = c^2$

$r = \frac{c^2/\mu}{\frac{\lambda}{\mu}\cos v + 1}$ каноническое уравнение кривой II порядка в полярных координатах.

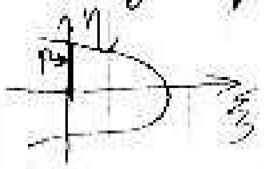
$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos v}} \quad (10) \qquad p = \frac{c^2}{\mu} \quad e = \frac{\lambda}{\mu}$$

v - истинная аномалия

p - фокальный параметр

e - эксцентриситет

r - из фокуса орбиты



$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \eta\dot{\zeta} - \zeta\dot{\eta} = 0 \\ c_2 &= 0 \\ c_3 &= \xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} = c \end{aligned}\right\}$$

$r^2\dot{v} = c$

$r^2 d\nu = c\,dt$

$$\boxed{\int_0^\nu r^2 d\nu = c(t-\tau)} \qquad (11)$$

$r, \dot r, \xi, \eta, \dot\xi, \dot\eta$ опр. как функции t, p, e, τ

$\dot r = \frac{ec}{p}\sin\nu$, $\quad \dot\nu = \frac{c}{r^2}$

$\dot\xi = -\frac{c}{p}\sin\nu$, $\quad \dot\eta = \frac{c}{p}(e+\cos\nu)$

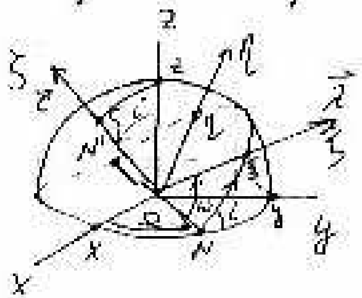
$$\dot r = \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{1+e\cos\nu}\right) = \frac{-p(-e\sin\nu)\dot\nu}{(1+e\cos\nu)^2}$$

τ — момент прохождения через перицентр.

$$v = \frac{c}{p}\sqrt{1+2e\cos\nu+e^2}$$

§7. Кеплеровские элементы.

$p = \frac{c^2}{\mu}$, $e = \frac{\lambda}{\mu}$, τ



$M_0(x,y,z)$

N', N — узлы орбиты: восходящий, нисходящий

$N'N$ — линия узлов.

Ω — долгота восходящего узла

i — наклонение орбиты

$0 \le \Omega < 2\pi$

$0 \le i < \pi$

$i > \frac{\pi}{2}$ — обратное движение

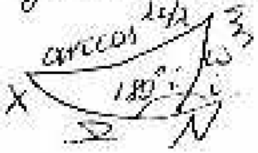
ξ — направление на перицентр

ω — угловое расстояние перицентра от узла (аргумент перицентра)

$0 \le \omega < 2\pi$

$$\boxed{p,\ e,\ \tau,\ \Omega,\ i,\ \omega}$$

Будем рассматривать сферические треугольники.



$$\frac{\lambda_1}{\lambda} = \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda} = \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i$$

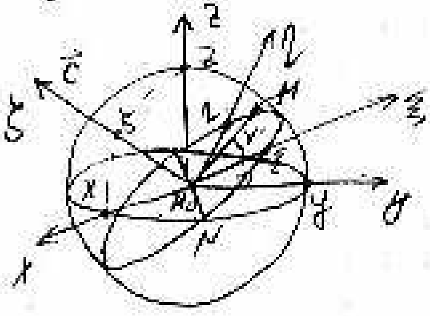
$$\frac{\lambda_3}{\lambda} = \sin\omega\sin i.$$

19.09.05

Лекция 3

Связь между кеплеровскими элементами и постоянными интегрирования

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1}{\lambda} = \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i \\ \frac{\lambda_2}{\lambda} = \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i \\ \frac{\lambda_3}{\lambda} = \sin\omega\sin i \end{cases} \qquad (3)$$



ξ - направление на перицентр

$\eta \perp \xi, \zeta$; $\eta, \xi \in$ плоскости орбиты

$\Delta \zeta x N$: $\zeta N = 90°$ $\zeta x = \arccos\alpha^*$, $\alpha^* = c_1/c$

$xN = \Omega$ $\angle xN\zeta = 90° - i$

$\frac{c_1}{c} = \cos 90° \cos\Omega + \sin 90° \sin\Omega \cos(90° - i)$

$$\boxed{\frac{c_1}{c} = \sin\Omega\sin i} \qquad (2)$$

$\Delta \zeta y N$: $\zeta y = \arccos\frac{c_2}{c}$

$$\boxed{\frac{c_2}{c} = -\cos\Omega\sin i} \qquad (2)$$

$$\boxed{\frac{c_3}{c} = \cos i} \qquad (1)$$

(1) $\to i$, $0 \le i < 180°$

(2) $\to \Omega$, $0 \le \Omega < 360°$

(3) $\to \omega$.

$$\begin{cases} \dfrac{c_2\lambda_3 - c_3\lambda_2}{c\lambda} = -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i \\ \dfrac{c_3\lambda_1 - c_1\lambda_3}{c\lambda} = -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i \\ \dfrac{c_1\lambda_2 - c_2\lambda_1}{c\lambda} = \cos\omega\sin i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{c^2}{\mu} = p \\ \dfrac{\lambda}{\mu} = e \end{cases}$$

$\tau = \tau$

$$\int_0^v r^2 dv = c(t-\tau)$$

v – истинная аномалия

$$r = \frac{p}{1+e\cos v}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, c_2, c_1, c_3, h, \tau \parallel p, c, i, \Omega, \omega, \tau$

$x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \parallel t, x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, \dot{y}^{(0)}, \dot{z}^{(0)}$

$\parallel t, p, e, i, \Omega, \omega, \tau$

v – отклонение положения точки от направления на перицентр.

u = аргумент широты планеты (τ M, текущее положение)

$\boxed{u = \omega + v}$ (4)

$u = |\overrightarrow{NM}|$

ΔxMN $|\overrightarrow{M_0M}| = |\vec{r}|$

$\vec{r}^0 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

единичный вектор, α, β, γ – направляющие косинусы.

$\vec{V}_u = \{\alpha', \beta', \gamma'\}$

$\alpha' = \dfrac{d\alpha}{du}$, $\beta' = \dfrac{d\beta}{du}$, $\gamma' = \dfrac{d\gamma}{du}$

ΔxMN $xN = \Omega$

$NM = 180^\circ - i$

$xM = \arccos\alpha = \arccos\dfrac{x}{r}$

$\dfrac{x}{r} = \cos\Omega\cos u - \cos i\sin\Omega\sin u$

$$\begin{cases} x = r\alpha & \dot{x} = (c/p)[\alpha e\sin v + \alpha'(1+e\cos v)] \\ y = r\beta & \dot{y} = (c/p)[\beta e\sin v + \beta'(1+e\cos v)] \\ z = r\gamma & \dot{z} = (c/p)[\gamma e\sin v + \gamma'(1+e\cos v)] \\ \alpha = \cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i & \\ \beta = \sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i & \\ \gamma = \sin u\sin i & \end{cases}$$

α', β', γ'...

$\alpha' = \dfrac{d\alpha}{du}$, $\beta' = \dfrac{d\beta}{du}$, $\gamma' = \dfrac{d\gamma}{du}$

$c = \sqrt{\mu p}$, $r = \dfrac{p}{1+e\cos v}$

$$\int_0^v r^2 dv = c(t-\tau) \qquad X = A\Xi$$

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = A \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Vmatrix} = A \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{Vmatrix}$$ у движущегося тела

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha_\tau & \alpha_{\tau'} & \alpha^* \\ \beta_\tau & \beta_{\tau'} & \beta^* \\ \gamma_\tau & \gamma_{\tau'} & \gamma^* \end{Vmatrix}$$

$$x = \alpha_\tau \xi + \alpha_{\tau'} \eta \qquad \dot{x} = \alpha_\tau \dot{\xi} + \alpha_{\tau'} \dot{\eta}$$

$$y = \beta_\tau \xi + \beta_{\tau'} \eta \qquad \dot{y} = \beta_\tau \dot{\xi} + \beta_{\tau'} \dot{\eta}$$

$$z = \gamma_\tau \xi + \gamma_{\tau'} \eta \qquad \dot{z} = \gamma_\tau \dot{\xi} + \gamma_{\tau'} \dot{\eta}$$

$$\begin{Vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \\ z & \dot{z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_\tau & \alpha_{\tau'} \\ \beta_\tau & \beta_{\tau'} \\ \gamma_\tau & \gamma_{\tau'} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi & \dot{\xi} \\ \eta & \dot{\eta} \end{Vmatrix}. \qquad (7)$$

Уравнения Бине

$r, \gamma, ?$ $\qquad \mu = f(m_0 + m)$

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow r^2\dot{\varphi} = c \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

(интеграл площадей)

$$\begin{matrix} t \to \varphi \\ r \to u = \frac{1}{r} \end{matrix} \qquad d\varphi = \frac{c}{r^2}\, dt$$

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2}$$

$$u = c_1\cos\varphi + c_2\sin\varphi + \frac{\mu}{c^2} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos(\varphi - \omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1 + e\cos v}$$

26.09.05

Лекция 4

При $c \neq 0$ $(p \neq 0)$ $p = c^2/\mu$

$e = 0$	окружность
$0 < e < 1$	эллипс
$e = 1$	парабола
$e > 1$	гипербола

p определяется так для любого конического сечения

если $c = 0$ – прямолинейное движение

$r_0, V_0, (\widehat{\vec{r}_0 \vec{V}_0})$

$\lambda^2 = \mu^2 + hc^2$ $\quad \frac{c^2}{\mu} = p, \quad \frac{\lambda}{\mu} = e$

$e^2 = 1 + \frac{h}{\mu} p$

$p = r_0 = const$ $\quad r = -\frac{\mu}{h}$

$0 = 1 + \frac{h}{\mu} r_0$ $\quad h = -\frac{\mu}{r_0} = -\frac{\mu}{p}$

$h = V^2 - \frac{2\mu}{r}$

$V_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$

$V_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ – эллипс или окружность.

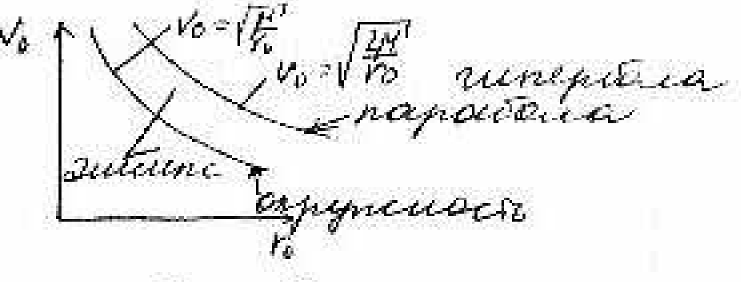
$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ – необязательно окружность.

Окружность, если $\sin(\widehat{\vec{r}_0 \vec{V}_0}) = 1$.

$\delta = (\widehat{\vec{r}_0 \vec{V}_0}) \neq 0$ или π

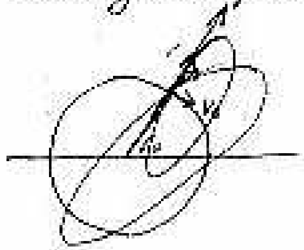
$\begin{cases} V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \\ \delta = 90^\circ \end{cases}$ – окружность $\quad V_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ – эллипс

$V_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ – парабола $\quad V_0 > \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ – гипербола



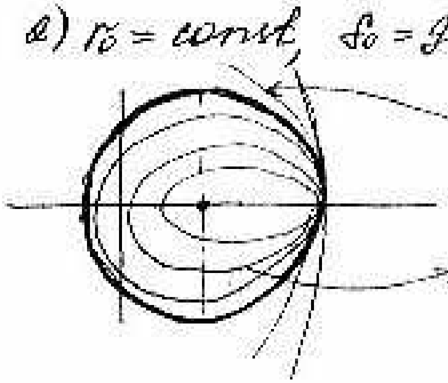
$\delta = 0°, 180°$ — прямая (отрезок, луч)

1) изоэнергетические траектории



$r_0, v_0 = const$
δ изменяется

2) $r_0 = const$, $\delta_0 = 90°$

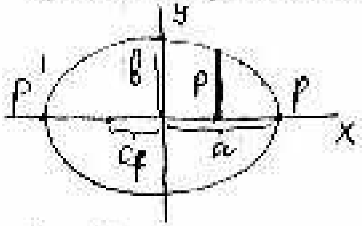


$\sqrt{\frac{\mu}{r_0}} < v < \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$

$0 \le v_0 < \sqrt{\frac{\mu}{v_0}}$

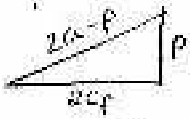
$v_0 > \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ — гипербола

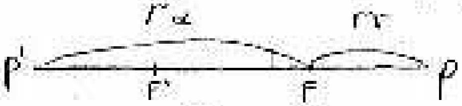
Эллиптическое движение.



$|O\Pi| = a = |O\Pi'|$, p — фокальный параметр

$c_f = ae$, $b^2 = a^2 - a^2e^2$
$b = a\sqrt{1-e^2}$





$r = \frac{p}{1+e\cos v}$

$r_\alpha = \frac{p}{1-e}$

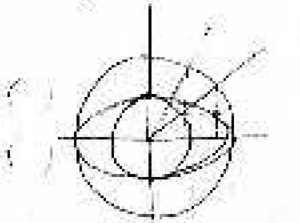
$r_\pi = \frac{p}{1+e}$

$r_\pi + r_\alpha = 2a \to \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2} = 2a$

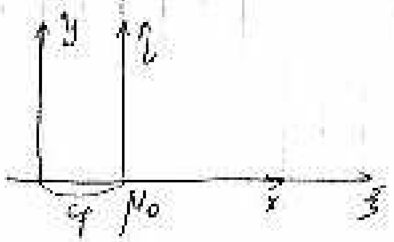
$\boxed{p = a(1-e^2)}$ (2)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\begin{cases} x = a\cos E \\ y = b\sin E \end{cases}$ (3)



E — эксцентрическая аномалия



$F = M_0$

$c_f = ae$

$\begin{cases} \xi = x - ae \\ \eta = y \end{cases}$ $\quad \xi = r\cos v$, $\eta = r\sin v$

$r\cos v = a(\cos E - e)$
$r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E$ (4)

$\boxed{r = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos v}}$

$r^2 = a^2(\cos^2 E + e^2 - 2e\cos E + \sin^2 E - e^2\sin^2 E)$;
$r^2 = a^2(1 - 2e\cos E + e^2\cos^2 E)$
$r^2 = a^2(1 - e\cos E)^2$

$\boxed{r = a(1 - e\cos E)}$

$r(1+\cos v) = a(\cos E - e + 1 - e\cos E) = a(1+\cos E)(1-e)$

$$\begin{cases} r\cos^2\frac{v}{2} = a(1-e)\cos^2\frac{E}{2} \\ r\sin^2\frac{v}{2} = a(1+e)\sin^2\frac{E}{2} \end{cases} \qquad (6)$$

$$r\sin^2\frac{v}{2} = a(1-e)\sin^2\frac{E}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{r}\cos\frac{v}{2} = \sqrt{a(1-e)}\cos\frac{E}{2}$$

$$\sqrt{r}\sin\frac{v}{2} = \sqrt{a(1+e)}\sin\frac{E}{2}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}} \qquad (4)$$

$\frac{v}{2}, \frac{E}{2}, \frac{M}{2}$ всегда лежат в одной четверти

Уравнение Кеплера.

$$r^2\dot{v} = c, \quad c = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$$

$$\int_0^v r^2 dv = c(t-\tau)$$

$$\frac{dv}{\cos^2\frac{v}{2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{dE}{\cos^2\frac{E}{2}}$$

$$dv = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{\cos^2 v/2}{\cos^2 E/2}dE = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{a(1-e)}{r}\,dE$$

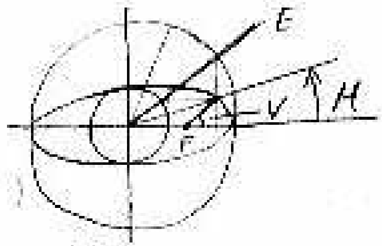
$$\int_0^v r^2 dv = \int_0^E r\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,a(1-e)dE = a^2\sqrt{1-e^2}\int_0^E(1-e\cos E)dE =$$

$$= \sqrt{\mu a(1-e^2)}\,(t-\tau)$$

$$\boxed{E - e\sin E = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t-\tau)} \qquad (8)$$

$E - e\sin E = M$; $\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} = n$ - среднее движение

$M = n(t-\tau)$ - средняя аномалия.



$$M = n(t-\tau)$$

Метод итерации.

$E_0 = M, \quad E = M + e\sin E$

1) $E = M + e\sin E_0$

. . . .

k) $E_k = M + e\sin E_{k-1}$

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{3/2}; \quad \mu = f(m_0+m)$$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{f}} = \frac{T}{a^{3/2}}\sqrt{m_0+m}, \quad \frac{4\pi^2}{f} = \frac{T^2}{a^3}(m_0+m)$$

$$\frac{T_p^2}{a_p^3}(m_\odot + m_p) = \frac{4\pi^2}{f}$$

p - планета, сп - спутник.

$$\frac{T_{сп}^2}{a_{сп}^3}(m_p + m_{сп}) = \frac{4\pi^2}{f}$$

$$\frac{m_p + m_{сп}}{m_\odot + m_{сп}} = \frac{a_{сп}^3}{a_p^3}\cdot\frac{T_p^2}{T_{сп}^2}$$

$$\frac{m_p}{m_\odot + m_p} \approx \frac{a_{сп}^3}{a_p^3}\frac{T_p^2}{T_{сп}^2}$$

Дополнительные интегрирование элементов в эллиптическом движении

Основные	p	e	i	Ω	ω	τ
Эллипт.	a, n, T	φ	$\operatorname{tg} i$, $\sin i$	V	π	M_0, E

$\pi = \Omega + \omega$ – долгота перицентра
$V = \Omega \pm 180^\circ$
$e = \sin\varphi$
$M = M_0 + n(t - t_0)$
M_0 – средняя долгота в точку t_0.
E –

Вычисление прямоугольных координат и компонент скоростей для эллиптического движения.

Определить $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \,//\, t, a, e, i, \Omega, \omega, M_0$

$M = n(t - t_0) + M_0$
$E - e\sin E = M \to E$

1) $\operatorname{tg}\frac{V}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2} \to V$ $\qquad \frac{V}{2}, \frac{E}{2}$ в 1-й четверти

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos V}$$

$u = V + \omega$

$x = r\alpha \qquad \dot{x} = \dot{r}\alpha + r\alpha'\dot{V}$
$y = r\beta \qquad \dot{y} = \dot{r}\beta + r\beta'\dot{V}$
$z = r\gamma \qquad \dot{z} = \dot{r}\gamma + r\gamma'\dot{V}$

$\alpha = \cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i$
$\beta = \cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i$
$\gamma = \sin u\sin i$

$\alpha' = \frac{d}{du}\alpha = -\sin u\cos\Omega - \cos u\sin\Omega\cos i$

$\beta' = \frac{d\beta}{du}$

$\gamma' = \frac{d\gamma}{du}$

$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e\cos V$

$\dot{V} = \frac{c}{r^2}, \quad c = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$

2) $r = a(1 - e\cos E)$
$\xi = a(\cos E - e)$
$\eta = a\sqrt{1-e^2}\sin E$
$\dot{\xi} = -a\dot{E}\sin E$
$\dot{\eta} = a\sqrt{1-e^2}\,\dot{E}\cos E$

$\dot{E} - e\cos E\,\dot{E} = n, \quad \dot{E} = \frac{n}{1 - e\cos E}$

$$\begin{Vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \\ z & \dot{z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_\tau & \alpha'_\tau \\ \beta_\tau & \beta'_\tau \\ \gamma_\tau & \gamma'_\tau \end{Vmatrix}$$

$u \to \omega$

$\alpha_\tau = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i$

$\alpha_\tau' = \frac{d(\alpha_\tau)}{d\omega}$

$\beta_\tau' = \frac{d(\beta_\tau)}{d\omega}$

$\gamma_\tau' = \frac{d(\gamma_\tau)}{d\omega}$

$e = 0$ ω не определена.

$u = \omega + v$
$r = p = a = r_0$

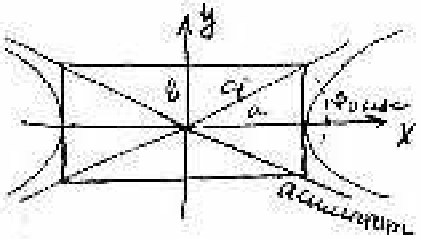
$V = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$

$u = v = E = M = n(t - t_0) + M_0$

$x = a(\cos M \cos\Omega - \sin M \sin\Omega \cos i)$
$y = a(\cos M \sin\Omega + \sin M \cos\Omega \cos i)$
$z = a \sin M \sin i$

$\dot{x} = na(-\sin M \cos\Omega - \cos M \sin\Omega \cos i)$

Гиперболическое движение



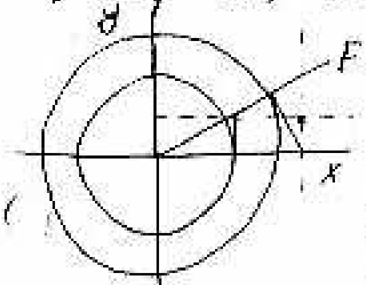
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

a - действительная полуось
b - мнимая полуось

c_f - полуфокусное расстояние

$c_f = ae$ ($e > 1$, $p \neq 0$) гипербола

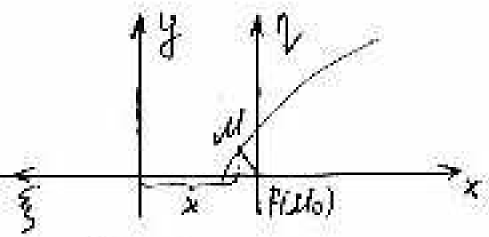
$b^2 = c_f^2 - a^2$, $b = a\sqrt{e^2 - 1}$



F - аналог эксцентрической аномалии.

$$\begin{cases} X = \frac{a}{\cos F} \\ Y = b \operatorname{tg} F \end{cases} \qquad (2)$$

$-90^\circ \le F \le 90^\circ$



$$X+\xi = ae$$
$$y = \eta$$

$$\begin{cases} \xi = r\cos v = ae - X \\ \eta = r\sin v = b\,\mathrm{tg}\,F \end{cases} \qquad (3)$$

$$\eta = r\sin v = a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{tg}\,F$$

$$\begin{cases} r\cos v = a\left(e - \frac{1}{\cos F}\right) \\ r\sin v = a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{tg}\,F \end{cases} \qquad (3')$$

$$\frac{r^2}{a^2} = e^2 - 2e/\cos F + 1/\cos^2 F + e^2\mathrm{tg}^2 F - \mathrm{tg}^2 F$$

$$\frac{r^2}{a^2} = \left(\frac{e}{\cos F} - 1\right)^2, \quad \boxed{r = a\left(\frac{e}{\cos F} - 1\right)} \qquad (4)$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{F}{2} \qquad (5)$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} = \frac{1-\cos v}{\sin v} = \frac{1 - ae - a/\cos F}{a\sqrt{e^2-1}\;\mathrm{tg}\,F} =$$

$$= \frac{e+e}{\sqrt{e^2-1}}\,\frac{\left(\frac{1}{\cos F} - 1\right)}{\mathrm{tg}\,F} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\frac{1-\cos F}{\sin F} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{F}{2}$$

(это был вывод (5))

Аналог уравнения Кеплера в гиперболическом движении.

$$\int_0 r^2\,dv = c(t-\tau)$$
$$v \to F$$

$$\frac{dv}{\cos^2 v/2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\frac{dF}{\cos^2 F/2}$$

$$2\cos^2\frac{v}{2} = 1+\cos v = 1 + \frac{e\cos F - 1}{e - \cos F} =$$
$$= \frac{(e-1)(1+\cos F)}{e-\cos F} = \frac{2(e-1)\cos^2 F/2}{e-\cos F}$$

$$c(t-\tau) = \int_0^F \frac{a^2(e-\cos F)^2}{\cos^2 F}\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,(e-1)\frac{dF}{e-\cos F} =$$
$$= a^2\sqrt{e^2-1}\int_0^F \frac{e-\cos F}{\cos^2 F}\,dF = \sqrt{\mu a(e^2-1)}\,(t-\tau)$$

$$\boxed{e\,\mathrm{tg}\,F - \ln\mathrm{tg}\left(\frac{F}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t-\tau)} \qquad (6)$$

Аналог уравнения Кеплера для гиперболического движения.

$$H = \ln\mathrm{tg}\left(\frac{F}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\mathrm{sh}\,H = \mathrm{tg}\,F$$
$$\mathrm{ch}\,H = \frac{1}{\cos F}$$
$$\mathrm{tg}\,\frac{H}{2} = \mathrm{tg}\,\frac{F}{2}$$
$$r = a(e\,\mathrm{ch}\,H - 1), \quad \mathrm{tg}\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\mathrm{tg}\,\frac{H}{2}$$

$$\boxed{e\,\mathrm{sh}\,H - H = n(t-\tau)} \qquad (4)$$

если заменить в эллиптическом движении $\begin{matrix} a \to -a \\ \sqrt{-1}\,E \to H \end{matrix}$, то получим гиперболическое.

$$\begin{cases} \xi = a(e - \mathrm{ch}\,H) \\ \eta = a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{sh}\,H \\ \dot\xi = -a\,\mathrm{sh}\,H\cdot\dot H \\ \dot\eta = a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{ch}\,H\cdot\dot H \end{cases}$$

$$e\,\mathrm{ch}\,H\,\dot H - \dot H = n\,H-\tau) \qquad \dot H = \frac{n}{e\,\mathrm{ch}\,H - 1}; \quad \dot H = \frac{na}{r}$$
$$\dot H(e\,\mathrm{ch}\,H - 1) = n$$

10.10.05 Лекция 6

Вычисление координат и компонент скоростей в гиперболическом движении.

$x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \;||\; t, a, e, \Omega, i, \omega, \tau$

$e\,\mathrm{sh}\,H - H = n(t-\tau) \Rightarrow H$ методом приближённого поиска корней.

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$$

1) $$\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\mathrm{th}\,\frac{H}{2}$$

$$r = \frac{a(e^2-1)}{1-e\cos v}$$

$u = \omega + v$

$\Downarrow$

$x = r\alpha \qquad \dot{x} = \dot{r}\alpha + r\alpha'\dot{v}$ см. эллиптическое движение

$y = r\beta \qquad \dot{y} = \dot{r}\beta + r\beta'\dot{v}$

$z = r\gamma \qquad \dot{z} = \dot{r}\gamma + r\gamma'\dot{v}$

2) $r = a(e\,\mathrm{ch}\,H - 1) \qquad \dot{\xi} = -a\dot{H}\,\mathrm{sh}\,H$

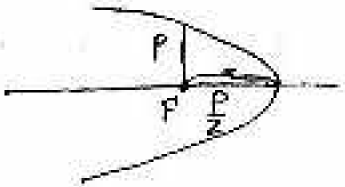
$\xi = a(e - \mathrm{ch}\,H) \qquad \dot{\eta} = a\sqrt{e^2-1}\,\dot{H}\,\mathrm{sh}\,H$

$\eta = a\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{sh}\,H$

$$\dot{H} = \frac{na}{r}$$

$$\begin{Vmatrix} x & \dot{x} \\ y & \dot{y} \\ z & \dot{z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_\tau & \alpha'_\tau \\ \beta_\tau & \beta'_\tau \\ \gamma_\tau & \gamma'_\tau \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi & \dot{\xi} \\ \eta & \dot{\eta} \end{Vmatrix}$$ см. эллиптическое движение.

Параболическое движение.



ось параболы

$r = \frac{p}{1+e\cos v}$

$e=1$

$p\neq 0$

$q,\ e=1,\ \Omega,\ \omega,\ i,\ \tau,\quad q=\frac{p}{2}.$

Уравнение Баркера.

$r^2\dot v = c, \quad c=\sqrt{\frac{\mu}{p}}$

$\int^v r^2 dv = c(t-\tau)$

$\int_0^v \frac{q^2}{\cos^4\frac{v}{2}}\,dv$

$v\to\sigma.\quad \sigma = \operatorname{tg}\frac{v}{2}$

$d\sigma = \frac{1}{2\cos^2\frac{v}{2}}\,dv \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\frac{v}{2}} = 1+\sigma^2$

$\int_0^v \frac{q^2}{\cos^4\frac{v}{2}}\,dv = 2\int_0^\sigma q^2(1+\sigma^2)\,d\sigma = 2q^2\left(\frac{\sigma^3}{3}+\sigma\right) =$

$=\sqrt{\mu}\sqrt{2q}\,(t-\tau)$

$$\boxed{\frac{\sigma^3}{3}+\sigma = n(t-\tau)} \qquad (1)$$

$n=\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}\,q^{3/2}}$

Вычисление координат и компонент скоростей в параболическом движении.

$x\,y\,z\,\dot x\,\dot y\,\dot z \parallel t,\ q,\ \Omega,\ \omega,\ i,\ \tau$

$\frac{\sigma^3}{3}+\sigma = n(t-\tau)\to\sigma$

$n=\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}\,q^{3/2}}$

$\sigma=\operatorname{tg}\frac{v}{2}\to v$

$r=\frac{q}{\cos^2\frac{v}{2}}$

$u=\omega+v$

$x = r\alpha \qquad r=q(1+\sigma^2) \qquad \dot\xi = -2q\sigma\dot\sigma$

$y = r\beta \qquad \xi=q(1-\sigma^2) \qquad \dot\eta = 2q\dot\sigma$

$z = r\gamma \qquad \eta=2q\sigma \qquad \dot\sigma = \frac{nq}{r}$

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_\tau & \alpha_\tau' \\ \beta_\tau & \beta_\tau' \\ \gamma_\tau & \gamma_\tau' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi & \dot\xi \\ \eta & \dot\eta \end{Vmatrix}$$

Прямолинейное движение.

$c=\sqrt{\mu p}$

$c=0$ или $p=0$.

$e=\frac{\lambda}{\mu},\quad \lambda^2=\mu^2+hc^2$

$\frac{\lambda^2}{\mu^2}=1,\ e=1$ в прямолинейном движении

$\vec c = \vec r\times\vec v = 0$

$r^2\dot v = c$

$\dot v = 0 \Rightarrow v = const$

$v^2 - \frac{2\mu}{r} = h$

$v = \dot r$

$\dot r^2 - \frac{2\mu}{r} = h$

$\dot r = \pm\sqrt{h + \frac{2\mu}{r}}$

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{h+\frac{2\mu}{r}}} = \pm \int_\tau^t dt = \pm(t-\tau) \qquad (1)$$

$\boxed{h<0}$ эллиптический тип

$h = -\frac{\mu}{a}$, $\frac{\mu}{h\sqrt{-h}}\left[\frac{\sqrt{2\mu+hr}\sqrt{-hr}}{\mu} - 2\arcsin\sqrt{\frac{-hr}{2\mu}}\right]_0^r =$

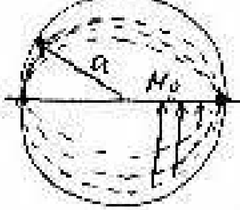
$= \pm(t-\tau)$

$\boxed{h>0}$ гиперболический тип

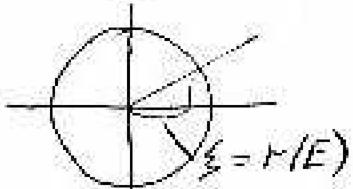
$$\frac{\mu}{h\sqrt{h}}\left[\frac{\sqrt{2\mu+hr}\sqrt{hr}}{\mu} - 2\ln\left(\sqrt{2\mu+hr}+\sqrt{hr}\right)\right]_0^r = \pm(t-\tau)$$

$\boxed{h=0}$ параболический тип

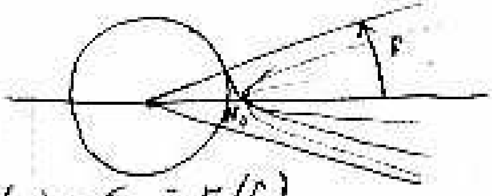
$$r = \left[r_0^{3/2} \pm \frac{3\sqrt{\mu}}{2}(t-t_0)\right]^{\frac{3}{2}}$$



a — большая полуось
M_0 — фокус
считаем $b=0$
$\xi = r(E)$



$E - \sin E = n(t-\tau)$
$r = a(1-\cos E)$
$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$



$-\xi = r(F)$

$$\begin{cases} sh H - H = n(t-\tau) \to H \\ r = a(ch H - 1) \to r \end{cases}$$

Вычисление координат и компонент скоростей для прямолинейного движения.

$r, \dot r(t, a, \tau)$

1) Эллиптический тип, $h<0$

$E - \sin E = n(t-\tau) \to E$

$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$

$r = a(1-\cos E)$

$\dot r = a\sin E\, \dot E$

$\dot E = \frac{na}{r}$

2) Гиперболический тип, $h>0$

$sh H - H = n(t-\tau) \to H$

$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$

$r = a(ch H - 1)$
$\dot r = a\, sh H\, \dot H$, $\dot H = na/r$

3) Параболический тип, $h=0$

$\frac{\sigma^3}{3} + \sigma = n(t-\tau) \to \sigma$

$n = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}\, q^{3/2}}$

$r = q(1+\sigma^2)$

$\dot r = 2q\sigma\dot\sigma$

$\dot\sigma = \frac{kq}{r}$

Вычисление эфемерид малых планет и комет.

Нужно определить α, δ и ρ (геоцентрическое расстояние)

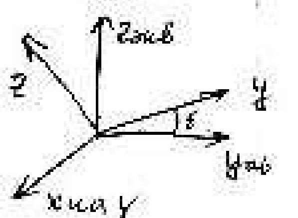
$\alpha, \delta, \rho \parallel t_1, t_2, \ldots, t_n, p, e, i, \Omega, \omega, \tau.$

$\vec\rho = \vec r + \vec R$

$\vec\rho = \{\rho\cos\alpha\cos\delta,\ \rho\sin\alpha\cos\delta,\ \rho\sin\delta\}$

$$\begin{cases} \rho\cos\delta\cos\alpha = x_{экв} + X_{экв} \\ \rho\cos\delta\sin\alpha = y_{экв} + Y_{экв} \\ \rho\sin\delta = z_{экв} + Z_{экв} \end{cases} \qquad (1')$$

x, y, z — эклиптические



$\varepsilon \approx 23°27'$

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_{экв} \\ y_{экв} \\ z_{экв} \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} x_{экв} \\ y_{экв} \\ z_{экв} \end{Vmatrix} = \underbrace{\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha_\tau & \alpha_\tau' \\ \beta_\tau & \beta_\tau' \\ \gamma_\tau & \gamma_\tau' \end{Vmatrix}}_{\begin{Vmatrix} A_\tau & A_\tau' \\ B_\tau & B_\tau' \\ C_\tau & C_\tau' \end{Vmatrix}} \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_\tau & \alpha_\tau' \\ \beta_\tau & \beta_\tau' \\ \gamma_\tau & \gamma_\tau' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} A_\tau & A_\tau' \\ B_\tau & B_\tau' \\ C_\tau & C_\tau' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \end{Vmatrix}$$

$A_\tau = \alpha_\tau$

$B_\tau = \beta_\tau\cos\varepsilon - \gamma_\tau\sin\varepsilon$

$C_\tau = \beta_\tau\sin\varepsilon + \gamma_\tau\cos\varepsilon$

$A_\tau' = \alpha_\tau'$

$B_\tau' = \beta_\tau'\cos\varepsilon - \gamma_\tau'\sin\varepsilon$

$C_\tau' = \beta_\tau'\sin\varepsilon + \gamma_\tau'\cos\varepsilon$

$A_\tau^2 + B_\tau^2 + C_\tau^2 = 1$

$A_\tau A_\tau' + B_\tau B_\tau' + C_\tau C_\tau' = 0$

Разложение в ряды.

1) Ряды Фурье

2) Ряды по степеням эксцентриситета

3) Ряды по степеням времени.

Чтобы с рядами можно было действовать, как с многочленами, нужно, чтобы

1) ряд сходился
2) ряд сходился равномерно (→ дифф., интегр.)
3) ряд сходился абсолютно.

Тригонометрические ряды в эллиптическом движении.

Теорема Дирихле.

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt)$ ряд Фурье

$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\, dt$

$b_k = \frac{1}{\pi}\int f(t)\sin kt\, dt$

если $f(t)$:

1) определена и непрерывна на $(0, 2\pi)$;

2) вне $(0, 2\pi)$ конечное число экстремумов и разрывов I рода;

3) вне $(0, 2\pi)$ $f(t+2\pi) = f(t)$,

то $\exists!$ ряд Фурье, сходящийся к $f(t)$ (равномерно и условно).

Если $f(t)$ чётная, то $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\pi} \cos kt$

Если $f(t)$ нечетная, то $f(t) = \sum b_k \sin kt$.

$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\,dt$;

$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$.

Уравнение Кеплера.

$E - e\sin E = M$, $M = n(t-\tau)$

E - не периодическая функция.

$E - M = e\sin E$

можно разлагать.

$E = e\sin E + M$ Ряд Фурье с добавкой.

17.10.05 Лекция 4.

$E - e\sin E = M = n(t-\tau)$

можно раскладывать в ряд Фурье функцию

$$E - M = e\sin E$$

$$E - M = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(E-M)\sin kM\,dM\right]\sin kM$$

$$-\frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}(E-M)\,d\cos kM = -\frac{2}{k\pi}(E-M)\cos kM\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos kM\,d(E-M) = \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos kM\,dE -$$

$$-\frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos kM\,dM = \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos(kE - x\sin E)\,dE =$$

$$= \frac{2}{k} J_k(x)$$

$x = ke$, e - эксцентриситет

Функция Бесселя

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kE - x\sin E)\,dE$$

$$\boxed{E - M = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_k(x)}{k}\sin kM} \qquad (1)$$

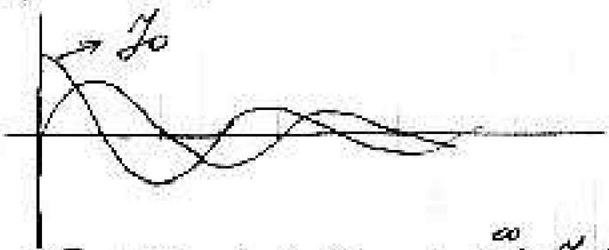
Производящая функция:

$\Phi(z,x) = e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n$ - разложение в ряд Лорана.

$$J_n''(x) + \frac{1}{x}J_n'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)J_n(x) = 0$$

$$\boxed{J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(s+n)!\,s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}} \qquad (2)$$

$J_0(x),\ J_1(x)$



$$E - M = e\sin E = \frac{2}{e}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_k(x)}{k}\sin kM$$

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x)}{k}\cos kM \qquad (3)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\xi}{a} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_\xi^{(k)}\cos kM \\ \dfrac{\eta}{a} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_\eta^{(k)}\sin kM \end{cases}$$

$$A_\xi^{(k)} = \frac{J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)}{k}, \quad A_\xi^{(0)} = \frac{e}{2}$$

$$B_\eta^{(k)} = \frac{J_k(ke)}{k}$$

$$\frac{x}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} A_x^{(k)}\cos kM + B_x^{(k)}\sin kM$$

$$\frac{y}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} A_y^{(k)}\cos kM + B_y^{(k)}\sin kM$$

$$\frac{z}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} A_z^{(k)}\cos kM + B_z^{(k)}\sin kM$$

$$A_x^{(k)} = \alpha_r A_\xi^{(k)}, \quad B_x^{(k)} = \alpha_r' B_\eta^{(k)}$$
$$A_y^{(k)} = \beta_r A_\xi^{(k)}, \quad B_y^{(k)} = \beta_r' B_\eta^{(k)}$$
$$A_z^{(k)} = \gamma_r A_\xi^{(k)}, \quad B_z^{(k)} = \gamma_r' B_\eta^{(k)}$$

$$E = M + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_k(ke)}{k}\sin kM = M + 2J_1(e)\sin M + J_2(2e)\sin 2M + \ldots =$$
$$= M + e\sin M\left(\frac{e}{2} - \frac{e^3}{16} + \ldots\right) + \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{6} + \ldots\right)\sin 2M + \ldots$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - e\left(1 - \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{26} - \ldots\right)\cos M + \ldots$$

Разложение координат и компонент скоростей в эллиптическом движении в ряды по степеням эксцентриситета.

$E - e\sin E = M, \quad F(E) = E - M - e\sin E = 0$

$F(z) = z - a - \alpha f(z) = 0$ уравнение Лагранжа

$\left|\dfrac{\alpha f(z)}{z-a}\right| < 1$ внутри некоторого контура S на КП a, $S(z)$

$$z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{da^{k-1}}\left[f^k(a)\right] = a + \alpha f(a) + \frac{\alpha^2}{2!}\frac{d}{da}\left[f^2(a)\right] + \ldots \qquad (2)$$

Ряд Лагранжа.

Формула Лагранжа

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{da^{k-1}}\left[\Phi'(a)f^k(a)\right] = \qquad (3)$$
$$= \Phi(a) + \alpha\Phi'(a)f(a) + \frac{\alpha^2}{2!}\frac{d}{da}\left[\Phi'(a)f^2(a)\right] + \ldots$$

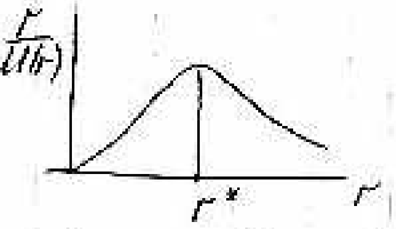
$$|\alpha| < \left|\frac{z-a}{f(z)}\right|$$

$|\alpha| < \frac{r}{|f(z)|}$

$M(r) = \max |f(z)|_C$

$|\alpha| < \frac{r}{M(r)}$

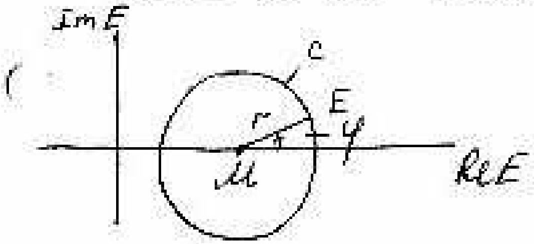
$\lim\limits_{r\to 0} \frac{r}{M(r)} = 0; \quad \lim\limits_{r\to\infty} \frac{r}{M(r)} = 0$



$|\alpha| < \alpha^* = \frac{r^*}{M(r^*)}$

24.10.05 Лекция 8

$F(E) = E - M - e\sin E = 0 \qquad (1)$



C - радиус сходимости

$|e| < \left|\frac{E-M}{\sin E}\right|$

$E = (M + r\cos\varphi) + ir\sin\varphi$

$|e| < \frac{r}{M(r)}$, $M = \max|\sin E|_C$ (на контуре)

$|e| < \frac{r}{M(r)} \le \left|\frac{E-M}{\sin E}\right|$

Надо найти $M(r)$

$E = a + ib$, $\sin E = \sin a\cos ib + \cos a \sin ib =$

$= \sin a\,\mathrm{ch}\,b + i\cos a\,\mathrm{sh}\,b$

$|\sin E| = \sqrt{\sin^2 a\,\mathrm{ch}^2 b + \cos^2 a\,\mathrm{sh}^2 b} =$

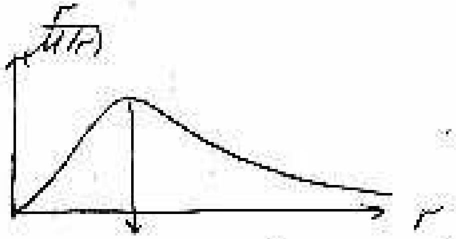
$= \sqrt{(1-\cos^2 a)\,\mathrm{ch}^2 b + \cos^2 a\,(1+\mathrm{ch}^2 b)} =$

$= \sqrt{\mathrm{ch}^2 b + \cos^2 a} \ge \sqrt{\mathrm{ch}^2 b} = \mathrm{ch}\,b = \mathrm{ch}\,(r\sin\varphi) \ge$

$\ge \mathrm{ch}\,r = \frac{e^r+e^{-r}}{2}$.

$M(r) = \frac{e^r+e^{-r}}{2}$

$|e| < \frac{2r}{e^r+e^{-r}} = T(r)$



здесь наибольший радиус сходимости по e.

$$T = 2\frac{e^r+e^{-r}-r(e^r-e^{-r})}{(e^r+e^{-r})^2} = 0$$

$$S(r) = e^r+e^{-r}-re^r+re^{-r} = 0$$

есть ли нули у $S(r)$ – ?

$s(0)>0$

$s(1) = e+\frac{1}{e} - e + \frac{1}{e} > 0$

$s(2) = e^2+\frac{1}{e^2} - 2e^2+\frac{2}{e^2} = -e^2+\frac{3}{e^2} < 0$

Решается численно.

$r = r^* = 1{,}1996786$

$e^* = \frac{2r^*}{e^{r^*}+e^{-r^*}}$, $e \le e^* \Rightarrow$ сходимость ряда

e^* – предел Лапласа.

$e^* = 0{,}6627434\ldots$

до 0,66 есть абсолютная сходимость.

Формула Лагранжа дает предел уравнения (1).

$$E = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^k}{k!}\frac{d^{k-1}(\sin^k M)}{dM^{k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k E_k(M) =$$

$$= M + e\sin M + \frac{e^2}{2}\sin 2M + \ldots \qquad (3)$$

(получается из ряда Лагранжа)

$$\cos E = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}}(-\sin^{k+1} M) = \sum_{k=0}^{\infty} e^k C_k(M) =$$

$$= \cos M + \frac{e}{2}(\cos 2M - 1) + \frac{3e^2}{8}(\cos 3M - \cos M) + \ldots$$

дифференцировать эти ряды можно т.к. они сходятся равномерно как тригонометрические ряды)

$$\begin{cases} \frac{\xi}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \Xi_k(M) \\ \frac{\eta}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k H_k(M) \end{cases}$$

$$\Xi_k(M) = C_k(M)$$

$$H_k(M) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s S_{k-s}(M)$$

$$S_k(M) = E_{k+1}(M)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k X_k(M) \\ \frac{y}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k Y_k(M) \\ \frac{z}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k Z_k(M) \end{cases}$$

$$X = \alpha_\tau \Xi_k + \alpha_\tau' H_k$$
$$Y = \beta_\tau \Xi_k + \beta_\tau' H_k$$
$$Z = \gamma_\tau \Xi_k + \gamma_\tau' H_k$$

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_{2k} = \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}, \quad \alpha_{2k+1} = 0$$

$$\ddot{\vec r} = -\frac{\mu \vec r}{r^3}$$

$$\vec r = \vec r_0 + \dot{\vec r}_0(t-t_0) + \frac{1}{2!}\ddot{\vec r}_0(t-t_0)^2 + \ldots \qquad (1)$$

$$\begin{cases} r = a(1-e\cos E) \\ E - e\sin E = n(t-\tau) \end{cases} \qquad (2)$$

$$\cos E = \frac{1}{e}$$

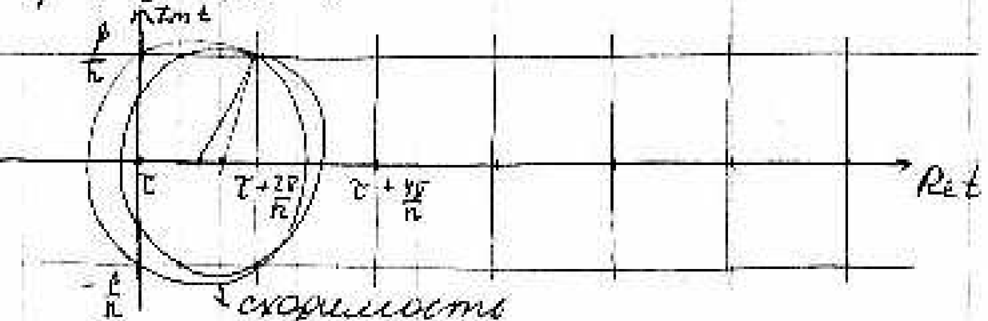
$$E_k = \pm i\alpha + 2k\pi$$

$$\alpha = \ln \frac{1+\sqrt{1-e^2}}{e}$$

$$t_k = \tau + i\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} - \frac{e}{n}\cdot\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2i}$$

$$t_k = \tau + \frac{2k\pi}{n} \pm i\frac{\beta}{n} \qquad (3)$$

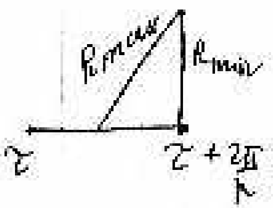
$$\beta = \alpha - \sqrt{1-e^2}$$



Особые точки, в которых теряется регулярность рядов, происходит столкновение тел.

$a = 2{,}65$ а.е.

e	R_{min} [сут]	R_{max} [сут]
0	∞	∞
0,1	501	934
0,3	231	821
0,5	113	796
0,9	8	788
1	0	484



Сингулярность и регуляризация.

$$(1-\cos t)\ddot{x} - \dot{x}\sin t + x = 0$$

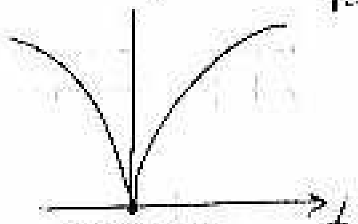
$$1-\cos t, \quad \sin t$$

$x = C_1(1-\cos t) + C_2\sin t$. решение регулярно (никаких особенностей), а уравнение сингулярность.

$$\ddot{r} = -\frac{\mu}{r^3}$$

$$\dot{r}^2 - \frac{2\mu}{r} = h$$

$$h=0, \quad r = \sqrt[3]{\tfrac{9}{2}\mu}\; t^{2/3}$$

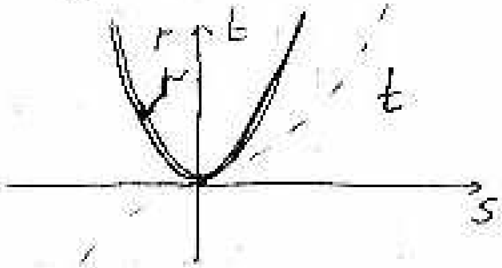


Регуляризация решения: *1 шаг $t \to s$

$$\frac{d}{ds} = r\frac{d}{dt}; \quad dt = r\,ds; \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{r}$$

$$rr'' - r'^2 + \mu^2 = 0$$

$$h=0 \qquad r = \tfrac{1}{2}\mu s^2, \quad t = \tfrac{1}{6}\mu s^3$$



*2 шаг регуляризации уравнения

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{r'^2}{r^2}\right) = -2\mu\frac{r'}{r^2}$$

$$\frac{r'^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} + const; \quad r'^2 = 2\mu r + hr^2.$$

$r'' - 2\mu r + hr^2 = 0$ (это регуляризованное ур-ие)

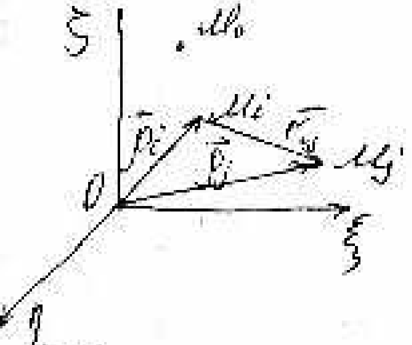
положим $r = u^2 \Rightarrow u'' - hu = 0$ (гарм. колебания)

Возмущённое движение

(задача многих тел)

Рассматриваем $n+1$ тело: $M_0, \dots, M_n$ (масс $m_0, \dots, m_n$), которые взаимно притягиваются.

§1. Уравнения движения в абсолютной системе отсчёта (невозмущённое)



$$\vec\rho_i = \{\xi_i; \eta_i; \zeta_i\}$$

$$r_{ij} = \sqrt{(\xi_i-\xi_j)^2+(\eta_i-\eta_j)^2+(\zeta_i-\zeta_j)^2}$$

$$m_i \frac{d^2\vec\rho_i}{dt^2} = f\sum_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n} \frac{m_i m_j}{r^3}\vec r_{ij} \qquad (1)$$

$$\vec r_{ij} = \{\xi_i-\xi_j;\ \eta_i-\eta_j;\ \zeta_i-\zeta_j\}$$

$$U = \frac{f}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j\ne i}^{n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = U(\xi_0,\eta_0,\zeta_0,\dots,\xi_n,\eta_n,\zeta_n)$$

$3n+3$ аргумента

$$m_i\frac{d^2\vec\rho_i}{dt^2} = \mathrm{grad}_i\, U \qquad (1')$$

$6(n+1)$ порядок системы.

⇒ для получения общего решения, его не найдено в существующем классе функций.

§2. 10 классических интегралов задачи многих тел.

(0) Интегралы движения центра масс.

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \frac{d^2\vec\rho_i}{dt^2} = \vec 0$$

$$② \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} m_i \dfrac{d\vec\rho_i}{dt} = \vec a & \vec a = const\{a_1, a_2, a_3\} \\ m r_c = \sum\limits_{i=0}^{n} m_i \vec\rho_i = \vec a t + \vec b & \vec b = const\{b_1, b_2, b_3\} \end{cases}$$

$$m = \sum_{i=0}^{n} m_i$$

Если $\vec a = \vec b = 0$ ⇒ неподвижная система координат в центре масс.

$\alpha = 270^\circ$, $\delta = 30^\circ$, 19,5 км/с

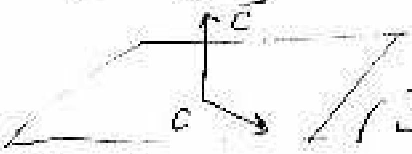
(3) Интеграл момента количества движения.

$$\sum_{i=0}^{n} \vec\rho_i \times m_i \frac{d^2\vec\rho_i}{dt^2} = \vec 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{d}{dt}\left(\vec\rho_i \times m_i \frac{d\vec\rho_i}{dt}\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \vec\rho_i \times m_i \underbrace{\frac{d\vec\rho_i}{dt}}_{\vec v_i} = \vec c \qquad (3)$$

Здесь движение не является плоским



$(\Xi-\xi_c, H-\eta_c, Z-\zeta_c)$

Уравнение плоскости $\perp \vec c$: $c_1(\Xi-\xi_c) + (H+\eta_c)c_2 + c_3(Z-\zeta_c) = 0$

Неизменная плоскость Лапласа.

(1) Интеграл энергии. $\frac{d\vec\rho_i}{dt} = \vec v_i = \{\dot\xi_i; \dot\eta_i; \dot\zeta_i\} = \dot{\vec\rho}_i$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \ddot{\vec\rho}_i \dot{\vec\rho}_i = f\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial U}{\partial \rho_i}\dot{\rho}_i = f\left(\frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t}\right)$$

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{d}{dt}\dot{\vec\rho}_i^{\,2} = \frac{dU}{dt} \qquad 0 \; (U = U(\xi_i, \ldots))$$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\vec\rho}_i^{\,2}$$

(4) $T - U = h$ U – силовая функция.

31.10.05 Лекция 9.

Если правые части регулярны, то для задачи многих тел $\exists!$ решение задачи Коши.

Брунс 1887

Нет $\nexists$ интеграла $F(t, \underbrace{\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \xi_1, \ldots, \zeta_2}_{9}) = c$

Пуанкаре 1889
Пенлеве

Задача n тел

$F(t, \xi_0, \ldots, \dot{\zeta}_n) = c$

Кноса...

Уравнение Лагранжа-Якоби.

$m_i \ddot{\vec\rho}_i = \operatorname{grad}_i U$ → силовая функция (1)
$(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \vec\rho_i \ddot{\vec\rho}_i = \sum_{i=0}^{n} \vec\rho_i \operatorname{grad}_i U \qquad (2)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}\right) = -U$$

$$U = \frac{f}{2}\sum_i \sum_{j=0}^{n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

$$U = U(\xi_0, \ldots, \zeta_n)$$

$$r_{ij} = \sqrt{(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2 + (\zeta_j - \zeta_i)^2}$$

$$\sum_{0}^{n} m_i (\vec\rho_i \ddot{\vec\rho}_i + \dot{\vec\rho}_i^{\,2}) = U + 2h \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\sum m_i(\vec\rho_i\dot{\vec\rho}_i)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=0}^{n} m_i\vec\rho_i^{\,2}$$

$$\sum_{0}^{n} m_i\dot{\vec\rho}_i^{\,2}=(U+h)\cdot 2$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2}=2U+4h \qquad (4)$$

$$(a_0^2+a_1^2+\dots+a_n^2)(b_0^2+b_1^2+\dots+b_n^2)=$$
$$=(a_0b_0+a_1b_1+\dots+a_nb_n)^2+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

$a_i=\sqrt{m_i}$, $\quad b_i=\sqrt{m_i}\,\xi_i$

$m=m_0+m_1+\dots+m_n$ масса всей системы

$$m\sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i^2=\left(\sum m_i\xi_i\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} m_im_j(\xi_j-\xi_i)^2$$

... η_i ...

... ζ_i ...

$\sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i$; $\sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i$; $\sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i$

$a_1t+b_1 \qquad a_2t+b_2 \qquad a_3t+b_3$

$\vec a=\{a_1,a_2,a_3\} \qquad \vec b=\{b_1,b_2,b_3\}$

$$m\sum_{i=0}^{n} m_i\vec\rho_i^{\,2}=(a_1t+b_1)^2+(a_2t+b_2)^2+(a_3t+b_3)^2+R$$

$$R=\frac{1}{2a}\sum_i\sum_j m_im_jr_{ij}^2$$

$$y=R+\frac{1}{m}\left[(a_1t+b_1)^2+(a_2t+b_2)^2+(a_3t+b_3)^2\right] \qquad (6)$$

$$m\sum_{0}^{n} m_i\vec\rho_i^{\,2}=(a_1t+b_1)^2+(a_2t+b_2)^2+(a_3t+b_3)^2+Rm$$

$$\ddot y=\ddot R+\frac{2}{m}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)$$

$$\frac{d^2R}{dt^2}=2U+4h' \qquad (7)$$

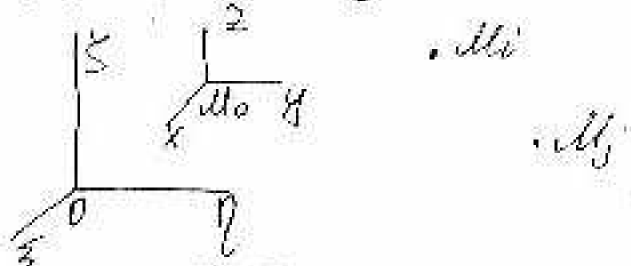
$$h'=h-\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2m}$$

$h'>0 \quad R\to\infty$ (система неустойчива, т.е. хотя бы 1 из тел вырывается)

$h'\le 0$ необходимое условие устойчивости

<u>Преобразование дифференциальных уравнений.</u>

M_0 – начало



$O\xi\eta\zeta\to M_0xyz$

$$m_i\ddot{\vec\rho}_i=f\sum_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n} m_im_j\frac{\vec\rho_j-\vec\rho_i}{r_{ij}^3} \qquad (1)$$

та же система

$$\ddot{\vec\rho}_i=f\sum_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n} m_j\frac{\vec r_j-\vec r_i}{r_{ij}^3}=f\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} m_j\frac{\vec r_j-\vec r_i}{r_{ij}^3}-fm_0\frac{\vec r_i}{r_i^3}$$

$$\ddot{\vec\rho}_i = f\sum_{j=0}^{n} m_j \frac{\vec r_j}{r_j^3} = f\sum_{j\ne i} m_j \frac{\vec r_j}{r_j^3} + f m_i \frac{\vec r_i}{r_i^3};$$

$$\ddot{\vec r}_i = -f(m_0+m_i)\frac{\vec r_i}{r_i^3} + f\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} m_j\left(\frac{\vec r_j-\vec r_i}{r_{ij}^3} - \frac{\vec r_j}{r_j^3}\right)$$

04.11.05

$$\ddot{\vec r}_i + f(m_0+m_i)\frac{\vec r_i}{r_i^3} = f\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} m_j\left(\frac{\vec r_j-\vec r_i}{r_{ij}^3} - \frac{\vec r_j}{r_j^3}\right) \quad (1)$$

$m_i \ll m_0$ (по степен. малого параметра)

если здесь поставить 0, то это будет уравнение движения i-й планеты (задача 2-х тел) в невозмущенном случае.

$$\begin{cases} \ddot x_i + f(m_0+m_i)\dfrac{x_i}{r_i^3} = f\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} m_j\left(\dfrac{x_j-x_i}{r_{ij}^3} - \dfrac{x_j}{r_j^3}\right) \\ \ldots \end{cases}$$

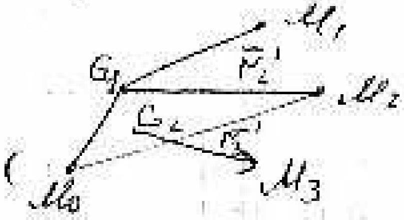
Пертурбационная функция (возмущающая)

$$R_i = f\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}} m_j R_{ij}; \quad R_{ij} = \frac{1}{r_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \quad (2)$$

$$\boxed{\ddot{\vec r}_i + f(m_0+m_i)\frac{\vec r_i}{r_i^3} = \operatorname{grad}_i R_i}$$

<u>Уравнение движения в координатах Якоби.</u>

Переходим от M_0xyz к $G_{i-1}x'y'z'$ (к системе центров масс)



$$\vec\rho_1 - \vec\rho_0 = \vec r_1'$$

$$\vec\rho_2 - \vec\rho_1 = \vec r_2' - \frac{\sigma_0}{\sigma_1}\vec r_1'$$

$$m_i' = m_i\frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}$$

$$\sigma_i = m_0 + m_1 + \ldots + m_i$$

$$\sigma = m_0 + \ldots + m_n$$

$$\vec{\rho}_{i+1} - \vec{\rho}_i = \vec{r}_{i+1}' - \frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}\vec{r}_i'$$

$$\left.\begin{array}{l} m_i' \ddot{x}_i' = \dfrac{\partial U}{\partial x_i'} \\ \dots \end{array}\right\}$$

$$m_i' \ddot{\vec{r}}_i' = \operatorname{grad}_i U \qquad (3)$$

$$U = \frac{f}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

$$r_{ij}^2 = \left(x_j' - x_i' + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k x_k'}{\sigma_k}\right)^2 + (x \to y)^2 + (y \to z)^2$$

Оскулирующие элементы

$\mu = f(m_0 + m_i)$

$\ddot{\vec{r}}_H + \frac{\mu}{r_H^3}\vec{r}_H = \vec{0}$ (Н) невозмущённое движение

$\Longleftrightarrow$ задача 2-х тел

$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = \vec{F}$ (возмущенное)

$x_H, y_H, z_H, \dot{x}_H, \dot{y}_H, \dot{z}_H \parallel t$ (известны, как функции t и постоянных)

$p, e, i, \Omega, \omega, \tau$

Основная идея Лагранжа (тоже соответствует методу вариации произвольных const)

$x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \parallel t, p(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), \tau(t)$

Оскулирующие элементы - элементы $p(t), \dots, \tau(t)$ орбиты, зависящие от t, которые в момент t определяют координаты и скорости по формулам невозмущённого движения.

Иначе

$x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \to p(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), \tau(t)$ (6)

→ некоторое коническое сечение

⇒ семейство невозмущённых конических сечений (или оскулирующих орбит)

Т.е. возмущённое движение является огибающей невозмущённых движений.

В точках совпадают координаты и скорости.

Уравнения Ньютона и уравнения Лагранжа.

Лагранж: для оскулирующих элементов,
Ньютон: для обобщённых сил.

Основные операции (Дубошин)

Пусть задана некоторая функция

$$\psi_H(t, x_H, y_H, z_H, \dot{x}_H, \dot{y}_H, \dot{z}_H, p, e, i, \Omega, \omega, \tau) = 0,$$

$$\psi(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, p(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t), \tau(t)) = 0$$

$$\frac{d\psi_H}{dt} = \frac{\partial\psi_H}{\partial t} + \frac{\partial\psi_H}{\partial x_H}\dot{x}_H + \dots + \frac{\partial\psi_H}{\partial \dot{x}_H}\ddot{x}_H + \dots + \frac{\partial\psi_H}{\partial \dot{z}_H}\ddot{z}_H = 0$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\dot{x} + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial \dot{x}}\ddot{x} + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial p}\dot{p} + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial \tau}\dot{\tau} = 0$$

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{dt} = 0 = \frac{\partial\psi}{\partial x}\ddot x - \frac{\partial\psi}{\partial x_н}\ddot x_н + \dots \frac{\partial\psi}{\partial p}\dot p + \dots$$

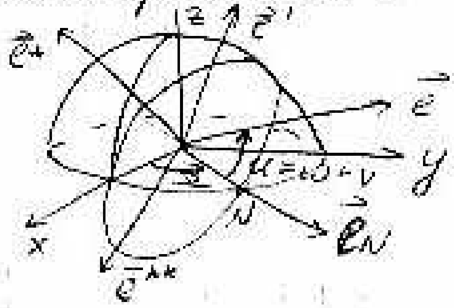
→ описывает операции

учитывая, что в V-L орбиты соприкасаются

$$\boxed{\left(\frac{d\psi}{dt}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(\ddot x - \ddot x_н) + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial p}\dot p + \dots}$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial x}F_x + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial z}F_z + \frac{\partial\psi}{\partial p}\dot p + \dots$$

Уравнение Ньютона (для оскулирующих элементов орбиты).



$\vec e, \vec e', \vec e^*$

$\vec e_N, \vec e^*, \vec e^{**}$

$\vec e^*$ - нормаль к плоскости орбиты

$$\vec e^* = \{\sin i \sin\Omega; -\sin i\cos\Omega; -\cos i\}$$

Ω - долгота восходящего узла

$$\vec e^{**} = \vec e_N \times \vec e^* = \frac{\partial \vec e^*}{\partial i}$$

$$\vec e^{**} = \{\cos i\sin\Omega; -\cos i\cos\Omega; \sin i\}$$

$$\vec e_N = \{\cos\Omega, \sin\Omega, 0\}$$

$\vec F = \{F_x, F_y, F_z\}$, $\quad \vec F = \{S, T, W\}$

$S = \vec F\vec e \qquad T = \vec F\vec e' \qquad W = \vec F \vec e^*$

радиальное трансверсальное перпендикулярное
направления

$F' = \frac{F}{\sqrt{\mu p}}$, $\quad F' = \{S', T', W'\}$

1) $\psi = \vec r\times\vec v - \vec c = 0$ (выбрали сами)

$\vec r = \{x, y, z\}$

$\vec v = \{\dot x, \dot y, \dot z\}$

$\vec c = \sqrt{\mu p}\,\vec e^*$

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right) = \vec r\times\underbrace{\frac{d\vec v}{dt}}_{\vec F} - \frac{d\vec c}{dt}$$

$$\frac{d\vec c}{dt} = \frac{\sqrt\mu}{2\sqrt p}\dot p\,\vec e^* + \sqrt{\mu p}\,\frac{d\vec e^*}{dt}$$

$$\frac{d\vec e^*}{dt} = \{\cos i\sin\Omega; -\cos i\cos\Omega; \sin i\}\frac{di}{dt} + \{\sin i\cos\Omega; \sin i\sin\Omega; 0\}\frac{d\Omega}{dt} = \vec e^{**}\frac{di}{dt} + \vec e_N\sin i\frac{d\Omega}{dt}$$

$$\frac{1}{2p}\dot p\,\vec e^* + \vec e^{**}\frac{di}{dt} + \sin i\,\vec e_N\frac{d\Omega}{dt} = \vec r\times\vec F' \quad (2)$$

3 скалярных уравнения.

$$\vec F' = \frac{\vec F}{\sqrt{\mu p}}$$

(2) - 3 скалярных уравнения относительно трёх неизвестных (в базисе $\vec e_N, \vec e^*, \vec e^{**}$) - это мы хорошо выбрали ψ (I интеграл)

$\cdot\,\vec e^*$ $\quad \frac{\dot p}{2p} = \vec e^*[\vec r\times\vec F'] = F'[\vec e^*\times\vec r] = F'r[\vec e^*\times\vec e]$

$= r(\vec{F}'\,\vec{e}') = rT'$

$\vec{r} = r\vec{e}$

<u>Окончательный вид</u>

$\boxed{\dot{p} = 2prT'}$, $\vec{F}'$ – возмущающая сила

$\frac{di}{dt} = \vec{e}^{**}[\vec{r}\times\vec{F}'] = \vec{F}'r[\vec{e}^{**}\times\vec{e}] = \vec{F}'r\vec{e}^{*}\sin u =$

$= rW'\cos u$

$$\boxed{\frac{di}{dt} = r\cos u\, W'}$$

$\sin i\,\dot{\Omega} = \vec{e}_N[\vec{r}\times\vec{F}'] = r\vec{F}'[\vec{e}_N\ ] = r(\vec{F}'\vec{e}^{*})\sin u$

$$\boxed{\dot{\Omega} = \frac{rW'\sin u}{\sin i}}$$

$$\left.\begin{aligned} V_r &= \sqrt{\tfrac{\mu}{p}}\, e\sin v \\ V_n &= \sqrt{\tfrac{\mu}{p}}(1+e\cos v) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} e\sin v &= \sqrt{\tfrac{p}{\mu}}\, V_r \\ e\cos v &= \sqrt{\tfrac{p}{\mu}}\, V_n - 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin v\,\dot{e} + e\cos v\left(\frac{dv}{dt}\right) &= \sqrt{\tfrac{p}{\mu}}\Big[\underbrace{\left(\frac{dV_r}{dt}\right)}_{S'} + \frac{V_r}{2p}\dot{p}\Big] \\ \cos v\,\dot{e} - e\sin v\left(\frac{dv}{dt}\right) &= \sqrt{\tfrac{p}{\mu}}\Big[\left(\frac{dV_n}{dt}\right)_{T'} + \frac{V_n}{2p}\dot{p}\Big] \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin v\,\dot{e} + e\cos v\left(\frac{dv}{dt}\right) &= pS' + \frac{e\sin v}{2p}\,2prT' \\ \cos v\,\dot{e} - e\sin v\left(\frac{dv}{dt}\right) &= pT' + (e\cos v + 1)rT' \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \sin v \\ \cos v \end{matrix}$$

Векторная операция

$\dot{e} = p\sin v\, S' + p[\cos v + (\cos v + e)\frac{r}{p}]T'$,

$$\boxed{e\left(\frac{dv}{dt}\right) = p\cos v\, S' - p\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\, T'} \quad (5)$$

Уравнения [illegible]

$$\begin{cases} x = r\alpha = r(\cos\Omega\cos u - \sin u\sin\Omega\cos i) \\ y = r\beta = r(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i) \end{cases} \quad (1)$$

$$u = \omega + v$$

$$\begin{array}{c|c} \cos\Omega & -\sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos\Omega \end{array}$$

$$\begin{cases} x\cos\Omega + y\sin\Omega = r\cos u \\ -x\sin\Omega + y\cos\Omega = r\sin u\cos i \end{cases} \quad (2)$$

$$-r\sin u\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(-x\sin\Omega + y\cos\Omega\right)\dot{\Omega}$$

$$\frac{du}{dt} = \dot{\omega} + \left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{p\cos v}{e}S' + \frac{\sin v}{e}(r+p)T' - \frac{r\cos i\sin u}{\sin i}W' \quad (3)$$

$\tau \Rightarrow M_0$ (эллиптический тип движения)

$$E - e\sin E = M = M_0 + n(t - t_0) \quad (4)$$

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}$$

$$(1 - e\cos E)\left(\frac{dE}{dt}\right) - \dot{e}\sin E = \dot{M_0} - \frac{3}{2}\frac{n}{a}(t - t_0)\dot{a}$$

← это известно или можно узнать

$$p = a(1 - e^2)$$

$$\dot{p} = \dot{a}(1 - e^2) - 2ae\dot{e} \Rightarrow \dot{a}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{v}{2}}\left(\frac{dv}{dt}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{E}{2}}\,\frac{dE}{dt}+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot\frac{1-e+1+e}{(1-e)^2}\cdot\dot e$$

$$\dot M=\sqrt{\frac{1-e^2}{e}}\left[(p\cos v-2er)S'-(r+p)(\sin v)T'\right]\quad(5)$$

$$\begin{cases}\dot a=2a^2\left(e\sin v\,S'+\frac{p}{r}T'\right);\\ \dot e=p\sin v\cdot S'+p(\cos v+\cos E)T';\\ \frac{di}{dt}=r\cos u\,W'\\ \dot\Omega=\frac{r\sin u}{\sin i}W'\end{cases}$$

(?)

$$\begin{cases}\dot\omega=-\frac{p\cos v}{e}S'+\frac{\sin v}{e}(r+p)T'-\frac{r\cos i\sin u\,W'}{\sin i}\quad(6)\\ \dot M_0=\sqrt{\frac{1-e^2}{e}}\left[(p\cos v+2er)S'-(r+p)(\sin v)T'\right]\end{cases}$$

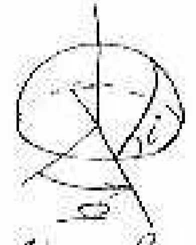
Смысл ω для кругового движения теряется.

$h=e\sin\omega$
$k=e\cos\omega$

$(e,\omega)\to(h,k)$

тогда никаких особенностей нет

Форма Ньютона (?)



$(i,\Omega)\to(p,q)$

$p=\sin i\sin\Omega$
$q=\sin i\cos\Omega$

Уравнения для оскулирующих элементов в форме Лагранжа.

$R(x,y,z)$

$x,y,z,\dot x,\dot y,\dot z\to a,e,i,\Omega,\omega,M_0$

$$\frac{\partial R}{\partial a}=\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}$$

Уравнения Ньютона (силы равно)

↓

Уравнения Лагранжа (будет упрощение)

Уравнения для элементов Якоби.

$H(q,p)=H_0+H_1$ функция Якоби

$a,e,i,\Omega,\omega,M_0\to\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$

элементы Якоби

$$\dot q=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \dot p=-\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$H_0+\frac{\partial S}{\partial t}=0$$

$$H_0+\frac{\partial S}{\partial t}=0\Rightarrow\alpha_1,\ldots,\beta_3=\mathrm{const}$$

если H_1, то

$$F=H+\frac{\partial S}{\partial t}=H_0+H_1+\frac{\partial S}{\partial t},\quad F=H_1$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_i}{dt} = \dfrac{\partial H_1}{\partial \beta} \\ \dfrac{d\beta_i}{dt} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \alpha} \end{cases}$$

21.11.05 Лекция 12.

Элементы Якоби, или другой способ интегрирования уравнения невозмущённого движения.

Функция Лагранжа $L = T + U$, $U = \frac{\mu}{r}$

$U = \frac{\mu}{r}$ – силовая функция

q, p, $H = T - U$.

$x, y, z \to r, \varphi, \lambda$ (широта и долгота)

$x = r\cos\varphi\cos\lambda$
$y = r\cos\varphi\sin\lambda$
$z = r\sin\varphi$

$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\cos^2\varphi\,\dot{\lambda}^2)$

$\underbrace{r, \varphi, \lambda}_{q}$; $R = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r}$; $\Phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi}$;

$\Lambda = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = r^2\cos^2\varphi\,\dot{\lambda}$

$\underbrace{R, \Phi, \Lambda}_{p}$, $T = \frac{1}{2}\left(R^2 + \Phi^2\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\Lambda^2\right)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}\right\}$$ $r, \varphi, \lambda, R, \Phi, \Lambda \to \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ (переменные Якоби) с помощью некоторой производящей функции.

$H \to F = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ (ищем такую про изводящую функцию)

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = 0 & \alpha, \beta = const \\ \frac{d\beta}{dt} = 0 \end{cases}$$

Интеграл энергии $H = T - U = \frac{h}{2} = \alpha_1$
(в задаче 2-х тел)
т.е $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{h}{2}$, $S = W - \alpha_1 t$,

$$W = W(r, \varphi, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$\frac{\partial W}{\partial r} = R = \dot{r}$ $\qquad$ $\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1 + t$

$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = \Phi = r^2\dot{\varphi}$ $\qquad$ $\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2$

$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = \Lambda = r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda}$ $\qquad$ $\frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \beta_3$

} с уравнений, связывающие в величины

Уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1 = h$$

в ч.п. 1-го порядка, ур-ие нелинейно

Полный интеграл этого уравнения должен содержать три независимых const $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Метод разделения переменных.

$$W = W_1(r) + W_2(\varphi) + W_3(\lambda)$$

$$\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W_3}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1$$

$$\boxed{\frac{dW_3}{d\lambda} = \alpha_3}$$

$$\boxed{\left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2\varphi}\alpha_3^2 = \alpha_2^2}$$

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1$$

$$W = \alpha_3\lambda + \int_0^{\varphi}\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi + \int_{r_\pi}^{r}\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}\,dr$$

r_π – радиус перицентра.

– производящая функция.

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} = \dot{r} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}} = r^2\dot{\varphi} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = \alpha_3 = r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int_{r_\pi}^{r}\frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = t + \beta_1 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \alpha_2\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}}} - \alpha_2\int_{r_\pi}^{r}\frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = \beta_2 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \lambda - \alpha_3 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}}} = \beta_3 \qquad (6)$$

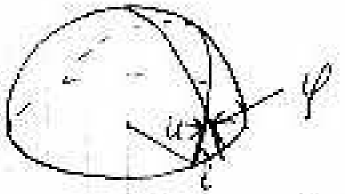
(6) → при $\varphi = 0$ $\quad \lambda = \Omega = \beta_3$ $\quad \begin{cases} \alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi} \geq 0 \\ \cos^2\varphi \geq \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} = \cos^2 i \end{cases}$

(7) → при $r = r_\pi$ $\quad \beta_1 = -\tau$

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \cos i$$

$$\alpha_2 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2\varphi}}\,\alpha_2}$$

u – аргумент широты планеты.



$u = \omega + v \qquad \frac{\sin\varphi}{\sin i} = \sin u$

$$\cos\varphi\, d\varphi = \sin i \cos u\, du$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2\varphi}}} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 i}} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2\varphi}} = \frac{\cos\varphi}{\cos i \sin u}$$

$$\alpha_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2\varphi}}} = \int_0^u du$$

$$\beta_2 = \omega$$

$$\frac{\sin i \cos u}{\cos\varphi} = r^2\dot\varphi \Rightarrow$$

(2) $\alpha_2 = r^2 \dot u = c = \sqrt{\mu p}$

$$\alpha_1 = \frac{\mu(e^2-1)}{2p} = \frac{h}{2}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\mu p}$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\mu p}\cos i$$

$$\beta_1 = -\tau, \quad \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega$$

$a = -\frac{\mu}{2\alpha_1} \qquad \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}$

$e = \sqrt{1 + 2\frac{\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}} \qquad \Omega = \beta_3$

$\omega = \beta_2, \qquad M_0 = n\beta_1 + n t_0$

$$(\underbrace{r, \varphi, \lambda}_{q}, \underbrace{R, \Phi, \Lambda}_{p}) \xrightarrow{W} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H_0}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial q} \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{matrix} \frac{d\alpha}{dt} = 0 \\ \frac{d\beta}{dt} = 0 \end{matrix}$$

$H = H_0 + H_1$ (H_0 – невозмущённое движение, притяжение только Солнца)

$$\left.\begin{matrix} \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{W} \left.\begin{matrix} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \beta} \\ \frac{d\beta}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \alpha} \end{matrix}\right\} F = H + \frac{\partial W}{\partial t} \quad \Theta$$

$\Rightarrow H_0 + H_1 + \frac{\partial S}{\partial t} = \underbrace{H_0 + \frac{\partial S}{\partial t}}_{=0} + H_1 = H_1$

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{dH_1}{d\beta} \\ \frac{d\beta}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \beta} \end{aligned}\right\}}$$

$H_1 = R$ – пертурбационная функция.

<u>Уравнения для оскулирующих элементов в форме Лагранжа</u>

$n^2 = \frac{\mu}{a^3}$, n – среднее движение.

$$\frac{da}{dt} = \frac{\mu}{\alpha_1^2}\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\mu}{\alpha_1^2}\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = \frac{2}{n^2 a}\frac{\partial R}{\partial \beta_1}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = -\frac{\partial R}{\partial \tau} = n\frac{\partial R}{\partial M_0}$$

$$(*)\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{2}{an}\frac{\partial R}{\partial M_0} \\ \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{1-e^2}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial M_0} \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{tg}\, i}\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega} \\ \frac{d\Omega}{d} = \frac{d\beta_3}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_3} \end{cases}$$

Вычислим: $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\beta_3}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_3}$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial R}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha_3}^{0} + \ldots + \frac{\partial R}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial R}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial \alpha_3}$$

$$(*)\begin{cases} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\,\mathrm{tg}\, i}\frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{dM_0}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{ena^2}\frac{\partial R}{\partial e} \end{cases}$$

(*) – ур-ия для оскул эл-ов в форме Лагранжа.

Особенности те же самые ($n \neq 0$ и это не особенность)

<u>Метод Пуанкаре (метод малого параметра)</u>.

$(i = 1, \ldots, 6)$

$\frac{d\mathfrak{z}_i}{dt} = \mu f_i(t, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_6)$, μ – малый параметр.

Будем искать решение:

$\mathfrak{z}_i = \frac{\mathfrak{z}_{i0}}{\mu^0} + \frac{\delta_1 \mathfrak{z}_i}{\mu} + \frac{\delta_2 \mathfrak{z}_i}{\mu^2} + \ldots$ (ряд отн. μ)

$\mathfrak{z}_{i0}$ – члены 0-й степени отн. μ.

Порождающее решение $\mathfrak{z}_{i0} = const$ при $\mu = 0$

$$\int \frac{d\mathfrak{z}_i}{dt}\,dt = \underbrace{\mu \int f(t, \mathfrak{z}_{10}, \ldots, \mathfrak{z}_{60})\,dt}_{\delta_1 \mathfrak{z}_i}$$

$\mathfrak{z}_i = \mathfrak{z}_{i0} + \delta_1 \mathfrak{z}_i$

$$\int \frac{dx_i}{dt}\,dt = \mu \int f(t, x_{10}+\delta_1 x_{10}, \dots x_{60}+\delta_1 x_{60})\,dt$$

$$f(t, x_0+\delta_1 x) = f(t, x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta_1 x + \dots$$

$$x_i = x_{i0} + \delta_1 x_i + \delta_2 x_i$$

$$(*)\quad \delta_2 x_i = \mu \int \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta_1 x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_6}\delta_1 x_6\right) dt$$

Сходимость ряда (*) на бесконечном интервале t не доказана. Ряд сходится абсолютно на интервале $t - t_0 \sim \frac{1}{\mu}$.

Пусть 2 планеты: ① M – возмущаемая
$a, e, i, \Omega, \omega, M_0$
② M' – возмущающая
$a', e', i', \Omega', \omega', M_0'$

$$R = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{k'=-\infty}^{\infty} A_{kk'} \sin (kM + k'M' + B_{kk'})$$
(cos)

средняя аномалия ②

средняя аномалия ①

$$A_{kk'} = \sum_l \sum_s \sum_r e_{lsr}(a, a')\, e^l e'^s \gamma^r$$

$B_{kk'}$ // $i, i', \Omega, \Omega', \omega, \omega'$

$$A\sin(kM + k'M' + B) = A\sin[(kn+k'n')t - (kn+k'n')t_0 + kM_0 + k'M_0' + B]$$
$$\left(\begin{aligned} M &= M_0 + n(t-t_0) \\ M' &= M_0' + n'(t-t_0) \end{aligned}\right)$$

$A\sin[(kn+k'n')t + B']$

$A\cos[(kn+k'n')t + B']$ (**)

$kn + k'n'$

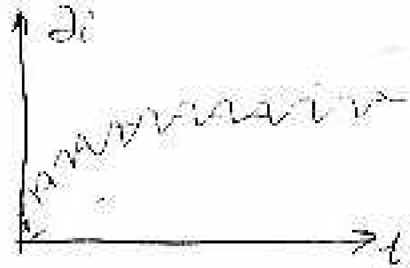
Если $kn + k'n' = 0 \Rightarrow A\sin B'$ – свободный член $\Rightarrow$ при интегрировании можно получить член ct.

А в (**) появляется резонанс.

Возмущения: вековые (непериодические, e^t)

периодические → короткопериодические $kn + k'n' \sim n$

→ долгопериодические $kn + k'n' \ll n$.



Вековые: нулевого, первого, второго, ... порядков.

28.11.05 Лекция 13

Теорема Лапласа-Лагранжа о вековых возмущениях в больших полуосях.

Если средние движения возмущаемой и возмущающей планет несоизмеримы в начальный момент, то вековые возмущения 1 порядка в больших полуосях отсутствуют.

P: $a, e, i, \Omega, \omega, M_0$

P': $a', e', i', \Omega', \omega', M_0'$

$$\sum_{k,k'=-\infty}^{\infty} A\sin[(kM+k'M')+B] = A\sin[(kn+k'n')t +$$

$$+ kM_0 + k'M_0' - (kn+k'n')t_0 + B] =$$

$$= A\sin[(kn+k'n')t + n'(t-t_0) + B']$$

$$(M = M_0 + n(t-t_0))$$

При интегрировании в знаменатель входит $(kn+k'n')$, которое может быть равным нулю. Это резонанс.

Вековой член – член, в котором $(kn+k'n')=0$.

Условие несоизмеримости средних движений:

$$kn^{(0)} + kn'^{(0)} = 0 \Rightarrow k = k' = 0$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M_0}$$

Существует теория вычисления вековых возмущений.

Процедура усреднения:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M}\, dM$$

$k_n^{(0)} + k_n'^{(10)} = 0$ (по условию) $\Rightarrow k_n^{(1)} + k_n'^{(10)} = 0$ (из усреднения)

по условию $k = k' = 0 \Rightarrow kM_0 = k'M_0' = 0$

$a_{\text{вк}} =$ (или $a = a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a + \dots$)

$$\delta = \underbrace{\delta_{1\text{вк}}}_{=0} + \delta_{1\text{пер}}$$

Оказалось, что вековые возмущения 2 порядка также $=0$. Но для более высоких порядков они $\neq 0$.

Теорема Лапласа об устойчивости солнечной системы.

Если

1) движение планет происходит в 1 направлении (прямое);

2) массы всех планет $m_s/m_0 = \alpha$, α — малый параметр;

3) большие полуоси на интервале (t_0, T): $a = \alpha_1 + a^{(0)}$ (малая величина);

4) в $t = t_0$ $e_s^{(0)} = \alpha_2$, $i_s^{(0)} = \alpha_3$;

то для $\forall t \in (t_0, T)$ $e_s = \alpha_4$ и $i_s = \alpha_5$ (также малы)

Док-во. (с точностью до малых)

Рассмотрим задачу многих тел.

$$\sum_{i=0}^{n} m_i (\vec\rho_i \times \dot{\vec\rho}_i) = \vec c$$

В относительном движении

$\vec\rho_i = \vec\rho_0 + \vec r_i$

$\vec\rho_0 \sim \vec I$

$m_0\vec\rho_0 = -\sum_{i=1}^{n} m_i \vec\rho_i$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i[\vec r_i \times \dot{\vec r}_i] + (\vec\rho_0 \times \dot{\vec\rho}_0) + \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec\rho_0 + \vec r_i) + \sum m_i[\vec r_i \times \dot{\vec\rho}_0]$$

0 (движение 0 игнорируем)

$= \sum m_i[\vec r_i \times \dot{\vec r}_i] = \vec c_1 + \alpha_6$ (интеграл площадей)

$\sum m_i(y_i \dot z_i - z_i \dot y_i) = c' + \alpha$

$\sum m_i(z_i \dot x_i - x_i \dot z_i) = c'' + \alpha$

$\sum m_i(x_i \dot y_i - y_i \dot x_i) = c''' + \alpha$

Выберем плоскость Лапласа (неизменная) (x, y)

$\sum m_i(x_i \dot y_i - y_i \dot x_i) = c''' + \alpha$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \sqrt{\mu_j p_j}\cos i_j = c''' + \alpha_7$$

$p_j = a_j(1 - e_j^2)$

$$\ominus\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} m_j \sqrt{\mu_j a_j^{(0)}} = c_0 = const \text{ (в силу допущения)} \\ \sum_{j=1}^{n} m_j \sqrt{\mu_j a_j^{(0)}} \cdot \sqrt{1 - e_j^2}\cos i_j = c''' + \alpha_7 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \sqrt{\mu_j a_j^{(0)}}\left(1-\sqrt{1-e_j^2}\cos i\right) = c_0 - c^{\omega} - \alpha_7 = \alpha_8 \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \sqrt{\mu_j a_j^{(0)}}\, \frac{\sin^2 i_j + e_j^2 \cos^2 i_j}{1+\sqrt{1-e_j^2}\cos i_j} = \alpha_8$$

$i_j = \alpha_9$

$e_j = \alpha_{10}$

Теорема Арнольда

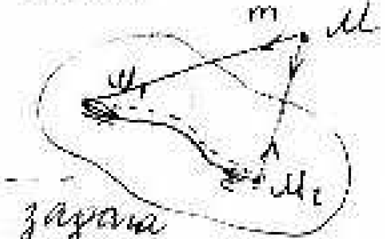
Если m_j, e_j, i_j планет достаточно малы в $t=0$, то для большинства начальных условий имеет место условно периодический характер движения на бесконечном интервале времени.

Т.А. позволяет утверждать, что система будет устойчива в смысле Лагранжа во всех приближениях.

Ещё КАМ-теория: построение условно-периодических движений.

Ограниченная задача трёх тел

На задачу накладываются ограничения.



задача двух тел

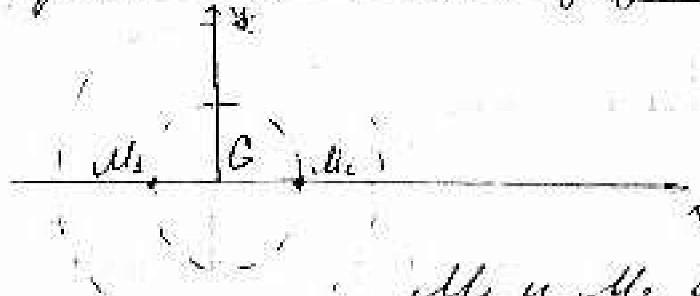
Считаем $m \ll m_1$, $m \ll m_2$.

=> m - тело малой массы, m_1, m_2 - основные тела. Пренебрегаем силами, с которыми m не притягивает m_1 и m_2.

Задачи:

1) ограниченная, круговая 3-х тел $\exists \int$ Якоби
2) ограниченная, эллиптическая 3-х тел
3) —"— , гиперболическая —"—
4) —"— , параболическая —"—
5) —"— , прямолинейная —"—

Вывод дифференциальных уравнений движения в поле двух тел



G - центр масс, начало координат. Мы вращаем на G.

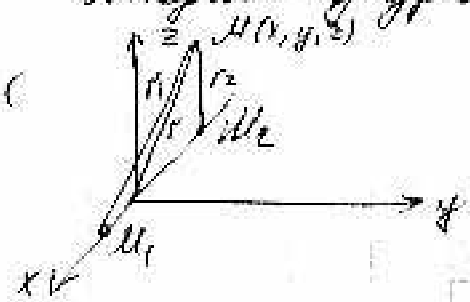
M_1 и M_2 движутся относительно G по круговым орбитам.

Oz $\perp$ плоскости движения

Gxyz

$\vec{\omega} = n\vec{z} = \{0, 0, n\}$ - угловая скорость вращения системы координат.

Выведем ур-я Лагранжа 2 рода.



$M_1(x_1, 0, 0)$, $M_2(x_2, 0, 0)$

$r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}$

$r_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2 + z^2}$

$U = f\frac{mm_1}{r_1} + f\frac{mm_2}{r_2}$

Будем считать, что $m = 1 \Rightarrow U =$
$= f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right)$

$L = T + U; \quad T = \frac{1}{2}V_{абс}^2$

Получим $V_{абс}$, тогда ур-ие движения.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{переносное}$

$\vec{V}_{отн} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$

$$\vec{V}_{перен.} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & n \\ x & y & z \end{vmatrix} = xn\vec{j} - yn\vec{i}$$

$\vec{V}_{пер} = \{-yn, xn, 0\}$

$\vec{V}_{абс} = \{\dot{x} - yn, \dot{y} + xn, \dot{z}\}$

$$L = \frac{1}{2}\left((\dot{x} - yn)^2 + (\dot{y} + xn)^2 + \dot{z}^2\right) + f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - yn, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = (\dot{y} + xn)n - f\left[\frac{m_1}{r_1^3}(x - x_1) + \frac{m_2}{r_2^3}(x - x_2)\right]$$

В круговом движении $n = const$

$$\ddot{x} - \dot{y}n - (\dot{y} + xn)n + f\left[\frac{m_1}{r_1^3}(x - x_1) + \frac{m_2}{r_2^3}(x - x_2)\right] = 0$$

$$\begin{cases} (1) \; \ddot{x} - 2\dot{y}n - xn^2 + f\left[\frac{m_1}{r_1^3}(x - x_1) + \frac{m_2}{r_2^3}(x - x_2)\right] = 0, \\ \text{Аналогично} \\ (2) \; \ddot{y} + 2n\dot{x} = n^2 y + \frac{\partial U}{\partial y} \\ (3) \; \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Стационарные решения (точки либрации) в ограниченной задаче трёх тел.

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\mu \geq \frac{1}{2}$$

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + U$$

$$U = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$$

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x+\mu-1)^2 + y^2 + z^2}$$

стационарное решение.

$x = const$, $y = const$, $z = const$ — ищем решение в таком виде. Получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= x - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x+\mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x+\mu-1) = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= y\left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}\right) = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= -z\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

1) $z=0$ $\quad y=0 \to L_1 L_2 L_3$

2) $z=0$ $\quad 1-\frac{1-\mu}{r_1^3}-\frac{\mu}{r_2^3}=0 \to L_4 L_5$

3) $z=\pm\infty \to L_{\pm\infty}$ $\quad L_{\pm\infty}(0,0;\pm\infty)$

1) Прямолинейные (коллинеарные) решения.

$$\varphi(x) = x-\frac{1-\mu}{r_1^3}(x+\mu)-\frac{\mu}{r_2^3}(x+\mu-1)$$

$\varphi(x)=0.$

$$\varphi'(x) = 1-\frac{1-\mu}{r_1^3}-\frac{\mu}{r_2^3}+\frac{3(1-\mu)}{r_1^5}(x+\mu)^2+$$
$$+\frac{3\mu}{r_2^5}(x+\mu-1)^2$$

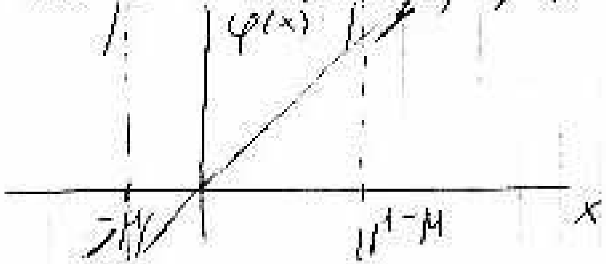
$r_1^2=(x+\mu)^2$ (т.к. $z=0, y=0$)

$$\varphi'(x)=1-\frac{1-\mu}{r_1^3}-\frac{\mu}{r_2^3}+\frac{3(1-\mu)}{r_1^3}+\frac{3\mu}{r_2^3}$$

$$\varphi'(x)=1+\frac{2(1-\mu)}{r_1^3}+\frac{2\mu}{r_2^3}>0$$

Особенности: $r_1=0$, $r_2=0$

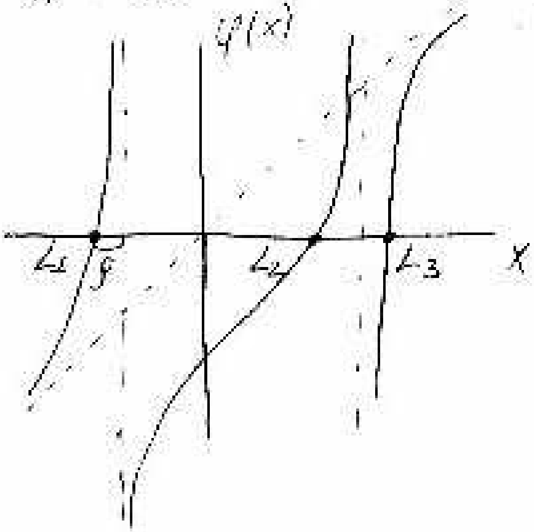
$r_1=0$: $M_1(-\mu;0;0)$
$r_2=0$: $M_2(1-\mu;0;0)$



$$\lim_{x\to-\mu\mp0}\varphi(x)=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to(1-\mu)\mp0}\varphi(x)=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\varphi(x)=\pm\infty, \quad \lim_{x\to\infty}(\varphi(x)-x)=0$$



L_1, L_2, L_3 — прямолинейные решения

$$\rho^5-(7+\mu)\rho^4+(19+6\mu)\rho^3-(24+13\mu)\rho^2+$$
$$+(12+14\mu)\rho-7\mu=0$$

$0\le\rho<1$

$r_{11}=1-\rho, \quad r_{21}=2-\rho.$

$\rho=c_1\mu+c_2\mu^2+c_3\mu^3+\dots$

$c_1=\frac{7}{12}$

$c_2=0$

$c_3=\frac{1127}{20736}$

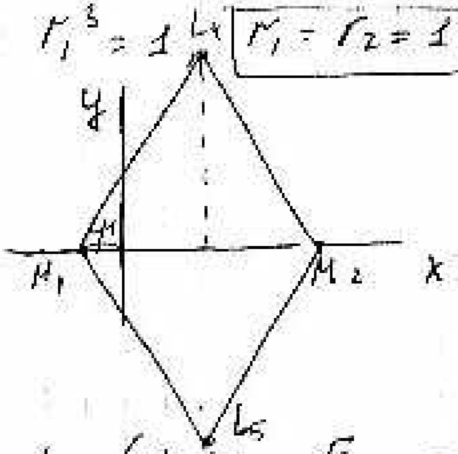
2) $$\begin{cases}-\frac{1-\mu}{r_1^3}\mu-\frac{\mu}{r_2^3}(\mu-1)=0\\ 1-\frac{1-\mu}{r_1^3}-\frac{\mu}{r_2^3}=0\end{cases}$$

$-\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{r_2^3}=0$ $\qquad r_1^3=r_2^3$

$r_1=r_2$

$1-\frac{1-\mu}{r_1^3}-\frac{\mu}{r_1^3}=1-\frac{1}{r_1^3}=0.$

$r_1^3=1$ $\qquad \boxed{r_1=r_2=1}$



$L_4\left(\frac{1-2\mu}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$

$L_5\left(\frac{1-2\mu}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$

L_4, L_5 устойчивы в первом приближении для $\mu(1-\mu)\le\frac{1}{27}$

Поверхности нулевой скорости (поверхности Хилла)

Интеграл Якоби.

$\frac{V^2}{2}-\Omega=h$

$V^2-2\Omega=2h$ $\qquad 2h=-c$

$V^2-2\Omega=-c$

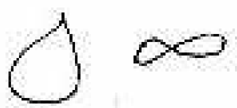
$V^2\ge0$

$2\Omega-c\ge0$

$\boxed{2\Omega\ge c}$ область пространства, где допустимо движение (иначе скорость получается комплексной)

$2\Omega=c$ поверхность нулевой скорости (поверхность Хилла)

Особые точки: не $\exists$ кас. пл-ти



Получаем уравнение (2)

Особые точки $\Leftrightarrow$ точки либрации.

Построение поверхностей Хилла.

$2\Omega=c$

$2\left(\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}\right)=c$

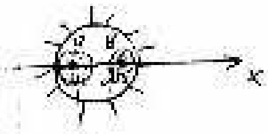
$c=-2h$, $c\ge0.$

c - большое

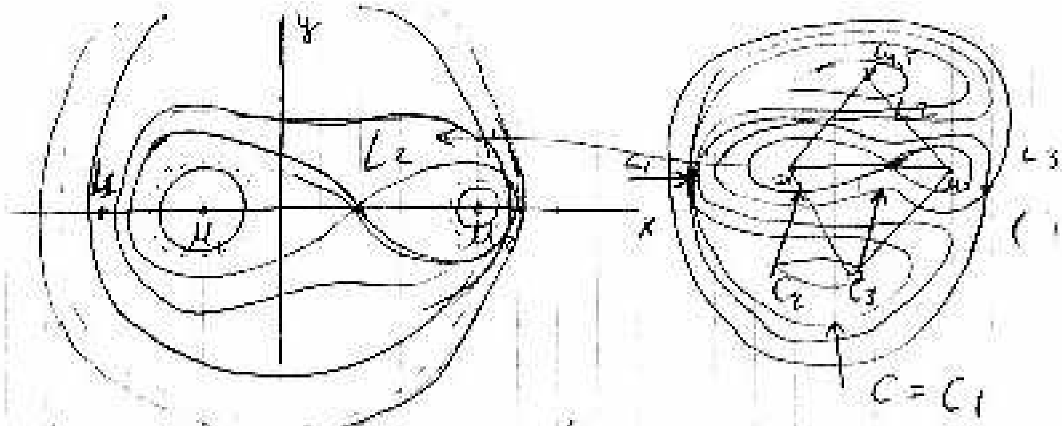
1) $\frac{x^2+y^2}{2}+\varepsilon_1=c$

2) $\frac{1-\mu}{r_1}+\varepsilon_2=\frac{c}{2}$ $\qquad r_1\approx a$

3) $\frac{\mu}{r_2}+\varepsilon_3=\frac{c}{2}$ $\qquad r_2\approx b$



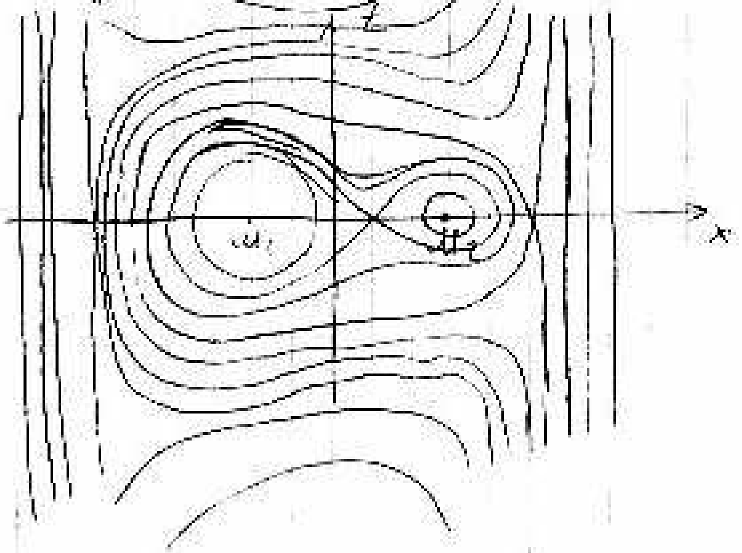
спутниковый тип движения



$L = L_2 \Rightarrow C = C_2$

$C \geqslant C_2$ Критерий устойчивости по Хиллу.

$C_{земли} > C_2$.



Астродинамика.

1) Нецентральность поля тяготения.

2) Сопротивление атмосферы.

3) Наличие реактивных сил (двигатель).

$$U = \frac{fm}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_{nk}(\sin\varphi)(C_{nk}\cos k\lambda + S_{nk}\sin k\lambda)\right]$$

$f = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ [СИ]

m – масса Земли

φ – широта

λ – долгота

$J_2 = 1{,}082628 \cdot 10^{-3}$

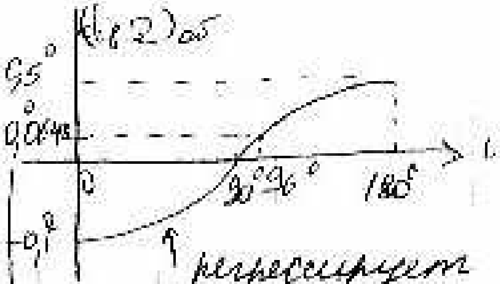
$J_3, J_4, \ldots, C_{nk}, S_{nk} \sim 10^{-6}$

$a = a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a + \ldots$

$\delta_1 a = (\delta_{1\,вековое} + \delta_{1\,периодич.})\, a$

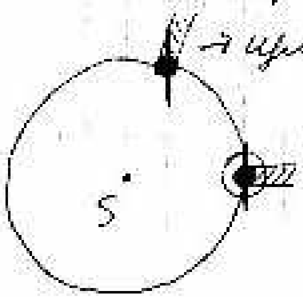
$$\begin{cases} \delta_{1в}\, p = 0 \\ \delta_{1в}\, e = 0 \\ \delta_{1в}\, i = 0 \\ \delta_{1в}\, \Omega = -\left(\frac{3}{2}\frac{r_0^2}{p^2} J_2 \cos i\right)(v - v_0) \\ \delta_{1в}\, \omega = \frac{3}{4}\frac{r_0^2}{p^2} J_2 (5\cos^2 i - 1)(v - v_0) \\ \delta_{1в}\, \tau = \ldots \neq 0 \end{cases}$$

вековые возмущения не меняют форму и наклон орбиты к плоскости экватора.



для высоты ≈ 500км

Орбита прецессирует.



орбита ⊥ плоскости лета ⇒ она всегда освещена!

→ соответствует вращению Земли, т.е. орбита остается солнечной, орбита должна иметь наклон ≈96°.

Влияние атмосферы.

Сопротивление атмосферы определяется аэродинамической силой, $\vec{Q}$:

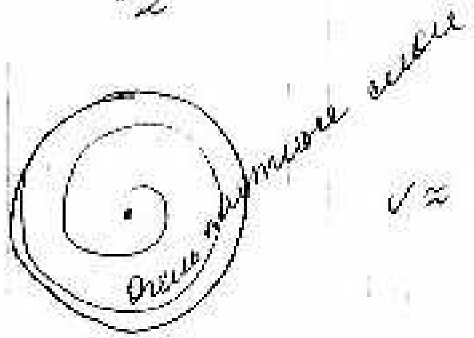
$$\vec{Q} = -\frac{\rho V^2}{2} C S \vec{V}_{отн}$$ – единичный вектор

C – коэффициент аэродинамического сопротивления

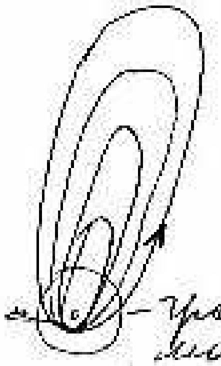
$$\vec{Q} = \{X, Y, Z\}$$

X – аэродин. сопротив. сила; Y – подъемная; Z – боковая сила

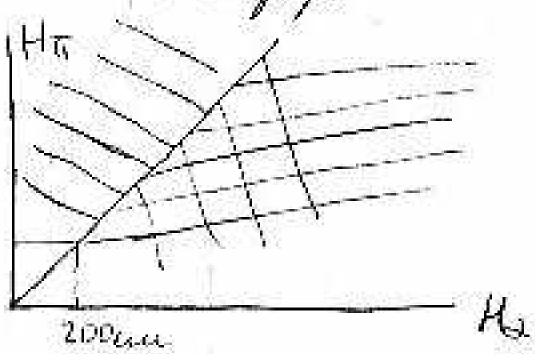
$$X = \frac{\rho V^2}{2} C_x S$$



V ≈ местной круговой.



– граница плотных слоёв атмосферы



π – перигей
α – апогей

Орбита стремится к круговой.

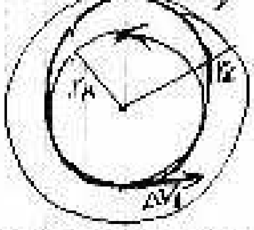
Эльсберг

Движение ИСЗ.

Влияние активных сил

1) Вывод на орбиту.

2) Маневры спутника на орбите.



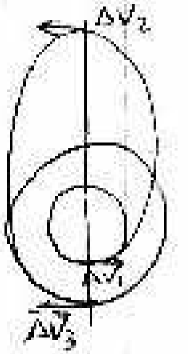
Задача: перевести спутник на орбиту $r_2 > r_1$.

по касательной

1 импульс $\Delta\vec{V}_1$: апогей на высоте r_2.

2 импульс $\Delta\vec{V}_2$: разность между скоростью на 2-й орбите и на эллипсе $\sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - V_a$ в апогее.

Гоман 1924.



Так энергетические затраты меньше.