ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.
Июнь 2006 г.

ПРАВИЛА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКЗАМЕНА.

1. Экзамен по курсу “Теория вероятностей и математическая статистика” начинается **в 10:00**.

2. Все студенты, пришедшие на экзамен, проходят предварительное **письменное тестирование**. Студенты, не сдавшие тест, получают неудовлетворительную оценку и не допускаются до устного ответа.

3. Вариант теста для каждого студента содержит 10 вопросов из прилагающегося списка, выбранных из разных разделов курса “Теория вероятностей и математическая статистика”. Наличие вариантов ответа на вопрос, как правило, не предусмотрено, студент должен найти ответ самостоятельно.

4. Тест оценивается по схеме “зачет–незачет”. Для получения положительной оценки необходимо дать **не менее 8 правильных ответов** из 10.

5. Время тестирования 15 мин. В процессе тестирования преподаватели строжайшим образом контролируют отсутствие шпаргалок, учебных пособий, конспектов лекций и т.п.

6. Положительная оценка за тест дает право получить удовлетворительную оценку за экзамен без устного ответа. Это право можно реализовать сразу после объявления результатов тестирования.

7. Студенты, успешно сдавшие тест и желающие получить хорошую или отличную оценку, продолжают сдавать экзамен в форме собеседования с преподавателем без билетов. **Положительный результат тестирования не гарантирует удовлетворительной оценки за устный ответ**.

8. В ряде вопросов теста значения отдельных параметров имеют несколько вариантов, поэтому вопрос может не совпадать в точности с тем, что представлен в списке. Суть вопроса при этом остается неизменной.

9. Пересдача неудовлетворительной оценки проходит по тем же правилам, что и основной экзамен, т.е. начинается с предварительного тестирования.

10. В вопросах теста, которые можно найти в прилагаемом списке, возможны незначительные изменения. Список вопросов будет окончательно сформирован к 20 мая.

ПРОГРАММА КУРСА.

1. Стохастический эксперимент.

   — понятие события

   — понятие стохастического эксперимента

   — элементарные события события как подмножества пространства элементарных событий

   — операции над событиями (объединение, пересечение, дополнение), свойства операций

   — алгебра и сигма-алгебра событий, примеры

   — сходимость последовательности событий, предел последовательности событий

2. Вероятностное пространство

   — аксиомы вероятности

   — непрерывность вероятности

   — примеры вероятностных пространств, классическая и геометрическая вероятности

3. Условная вероятность

   — условное вероятностное пространство

   — свойства условной вероятности

   — формула полной вероятности

   — формула Байеса

4. Последовательность независимых испытаний

   — биномиальное распределение (распределение Бернулли), полиномиальное распределение, отрицательное биномиальное распределение (распределение Паскаля)

   — теорема Пуассона, локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

5. Цепи Маркова

   — свойства цепи Маркова: конечность, однородность, эргодичность

   — матрицы перехода за один и n шагов; свойства матриц перехода

   — достаточное условие эргодичности (теорема Маркова)

6. Понятие случайной величины и случайного вектора

   — определение и свойства функции распределения случайной величины

   — дискретные и абсолютно непрерывные случайные величины и векторы

   — функции от случайных величин и случайных векторов, их распределения

   — условное распределение

7. Независимость событий и случайных величин

   — независимость событий: попарная и в совокупности

   — свойства независимых событий

   — независимость случайных величин: попарная и в совокупности

— функции от независимых случайных величин

8. Числовые характеристики распределения случайной величины и случайного вектора

    — математическое ожидание случайной величины и случайного вектора, его свойства
    — дисперсия случайной величины, свойства дисперсии
    — матрица ковариаций случайного вектора, ее свойства
    — характеристическая функция и ее свойства
    — теоремы обращения и непрерывности обращения характеристической функции (без доказательства)

9. Наилучшее (в среднем квадратичном) оценивание случайных величин и случайных векторов

    — наилучшее линейное оценивание случайной величины и случайного вектора (постановка задачи)
    — условное математическое ожидание как наилучшая в среднем квадратичном оценка случайной величины

10. Предельные теоремы

    — сходимость последовательности случайных величин: по вероятности, по распределению, в среднем квадратичном
    — законы больших чисел Чебышева и Маркова
    — центральная предельная теорема и интегральная теорема Муавра-Лапласа

11. Нормальное распределение (распределение Гаусса)

    — одномерное нормальное распределение и его характеристики (моменты, характеристическая функция)
    — линейное преобразование гауссова случайного вектора
    — многомерное нормальное распределение, его характеристики (математическое ожидание, матрица ковариаций) и основные свойства
    — распределение ортогональных проекций нормальных векторов и функций от них
    — распределения хи-квадрат (Пирсона), Стьюдента, Фишера

12. Случайные процессы

— определение случайного процесса
— основные характеристики случайного процесса: функции распределения, математическое ожидание, корреляционная функция
— процесс Пуассона: определение, характеристическое свойство, примеры пуассоновских потоков событий, распределение времени ожидания первого события
— процесс Винера: определение, характеристическое свойство, броуновское движение, распределение времени первого достижения точки x
— среднеквадратичные непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость случайного процесса, их связь со свойствами корреляционной функции

13. Точечное оценивание параметров распределения

— несмещенность, состоятельность оценки
— примеры точечных оценок математического ожидания и дисперсии
— свойства оценок минимальной дисперсии
— эффективность, теорема Крамера-Рао, экспоненциальное семейство
— оценка максимального правдоподобия

14. Интервальное оценивание параметров распределения

— постановка задачи интервального оценивания
— интервальные оценки математического ожидания и интервальные оценки дисперсии нормального распределения

15. Задачи оценивания в линейной модели измерения

— линейная схема косвенных измерений
— линейное оценивание, методы редукции измерений и метод наименьших квадратов
— теорема Гаусса-Маркова
— линейная модель измерения с нормальным шумом, доверительный эллипсоид, интервальные оценки

ВОПРОСЫ ТЕСТА.

1. Основные понятия теории вероятностей.

1.1 Упростить выражение $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.

1.2 Пусть A и B — два события. Найти выражение для множества тех исходов, при которых происходит ровно одно из событий A и B.

1.3 Совместны ли события A и $\overline{A \cup B}$?

1.4 Какое множество $\mathcal{F}$ подмножеств пространства элементарных исходов Ω называется алгеброй подмножеств?

1.5 Каким подмножеством достаточно дополнить множество $\mathcal{F} = \big\{\Omega, \{1, 2, 3\}, \{4\}\big\}$ для того, чтобы оно стало алгеброй подмножеств $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$?

1.6 Верно ли, что для любой алгебры подмножеств Ω подмножества $\varnothing, \Omega$ принадлежат этой алгебре?

1.7 Пусть A, B, C – три произвольных события. Найти выражение для события, заключающегося в том, что происходит хотя бы одно из этих событий.

1.8 Каким множеством достаточно дополнить пару A, B несовместных событий, чтобы получилась полная группа несовместных событий?

1.9 Пусть $\mathcal{F}$ — алгебра подмножеств Ω. Какое дополнительное условие надо наложить на $\mathcal{F}$ для того, чтобы $\mathcal{F}$ стала сигма-алгеброй?

1.10 Какое свойство вероятности называется сигма-аддитивностью?

1.11 При каком условии на события A и B имеет место равенство $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?

1.12 Известно, что наступление события A влечет наступление события B. Поставить знак неравенства между $P(A)$ и $P(B)$.

1.13 Всегда ли верно, что $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$?

1.14 Что такое независимость событий A и B?

1.15 Пусть события A и B являются независимыми и несовместными. Найти $\min\big(P(A), P(B)\big)$.

1.16 Следует ли из независимости событий в совокупности их попарная независимость?

1.17 Следует ли из попарной независимости событий их независимость в совокупности?

1.18 Известно, что A и B — независимые события. Верно ли, что события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы?

1.19 Как определяется вероятность того, что произойдет событие A, при условии, что произошло событие B.

1.20 Пусть события A и B являются независимыми. Чему равна $P(A|B)$?

1.21 Написать формулу полной вероятности.

1.22 Написать формулу Байеса.

1.23 Пусть все упомянутые далее условные вероятности существуют. Всегда ли при этом условии верно, что $P(\overline{A}\,|B) = 1 - P(A|B)$?

1.24 Пусть $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$. Можно ли при этом условии утверждать, что всегда верно следующее: $P(A) \geqslant P(A|B)$?

1.25 Проведено n независимых испытаний Бернулли, вероятность успеха в единичном испытании равна p. Чему равна вероятность того, что произошло ровно k успехов?

1.26 При каких условиях имеет место сходимость $C_n^k p^k q^{n-k} \longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$?

2. Теория случайных величин.

2.1 Какая функция $\xi(\cdot)$, заданная на пространстве элементарных исходов Ω, называется случайной величиной?

2.2 Что такое функция распределения случайной величины ξ?

2.3 Могут ли две различные случайные величины иметь одинаковые функции распределения?

2.4 Пусть $F(\cdot)$ есть функция распределения случайной величины ξ. Выразить через $F(x)$ следующие вероятности: $P(\xi = x), P(\xi > x)$.

2.5 Пусть $P(\xi < 0) = P(\xi > 1) = 0$. В каких случаях $F(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, может быть функцией распределения: (А) $F(x) = x/2 + 1/2$, (Б) $F(x) = x^2$, (В) $F(x) = 1/x$, (Г) ни в одном из случаев А–В.

2.6 Известно, что при $x \in (0,1)$ функция распределения случайной величины ξ имеет вид $F(x) = (x^2+1)/4$, $P(\xi < 0) = P(\xi > 1) = 0$. Чему равны $F(0)$ и $F(1)$?

2.7 Пусть $p(x)$ есть плотность распределения случайной величины ξ. Может ли для некоторого x_0 иметь место равенство $\lim\limits_{x \to x_0} p(x) = +\infty$?

2.8 Пусть $p(x)$ есть плотность распределения случайной величины ξ. Чему равна $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ?

2.9 Пусть $p(x)$, $-\infty < x < +\infty$, есть плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины ξ. Чему равна $P(a < \xi < b)$?

2.10 Пусть ξ — дискретная случайная величина и заданы $P(\xi = x_k) = p_k,\ k = 1, 2, \ldots$ Чему равно $M\xi$?

2.11 Пусть ξ — дискретная случайная величина и заданы $P(\xi = x_k) = p_k,\ k = 1, 2, \ldots$ При каком условии существует $M\xi$?

2.12 Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, $p(x)$ — плотность ее распределения. Чему равно $M\xi$?

2.13 Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, $p(x)$ — плотность ее распределения. При каком условии существует $M\xi$?

2.14 Может ли существовать $M\xi$ и не существовать $M|\xi|$?

2.15 Может ли случайная величина не иметь дисперсии?

2.16 Пусть существуют $M\xi_1, M\xi_2$. Равенство $M(\xi_1+\xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$ справедливо (А) для всех таких случайных величин, (Б) для независимых случайных величин, (В) если $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$, (Г) во всех случаях А–В. Выберите верные утверждения.

2.17 Пусть существуют $M\xi_1, M\xi_2$. Равенство $M(\xi_1\xi_2) = M\xi_1 \cdot M\xi_2$ справедливо (А) для всех таких случайных величин, (Б) для независимых случайных величин, (В) если $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$, (Г) во всех случаях А–В. Выберите верные утверждения.

2.18 Что такое дисперсия случайной величины ξ?

2.19 Пусть существует $D\xi = \sigma^2 < \infty$. Чему равна $D(2 - 3\xi)$?

2.20 Пусть существуют $D\xi_i, i = 1, 2, 3$. Равенство $D(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = D\xi_1 + D\xi_2 + D\xi_3$ справедливо (А) для всех таких случайных величин, (Б) для независимых в совокупности случайных величин, (В) для независимых попарно случайных величин, (Г) если $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0, i \neq j$, (Г) во всех случаях А–Г. Выберите верные утверждения.

2.21 Что такое ковариация (коэффициент ковариации) случайных величин ξ_1, ξ_2?

2.22 Что такое совместная функция распределения случайных величин ξ_1, ξ_2?

2.23 Какой вид имеет $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — совместная функция распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — в случае их независимости в совокупности?

2.24 Пусть $p_{\xi,\eta}(x, y)$ — совместная плотность распределения случайных величин ξ, η. Как найти плотность $p_\xi(x)$ распределения случайной величины ξ?

2.25 Пусть $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$ — плотность распределения случайной величины ξ. Найти численные значения $M\xi, D\xi$, не вычисляя интегралов.

2.26 Чему равно математическое ожидание случайной величины равномерно распределенной в интервале $(-1, 1)$?

2.27 Что такое характеристическая функция случайной величины ξ?

2.28 Записать неравенство Коши–Буняковского для моментов случайной величины.

2.29 Что такое сходимость по вероятности последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин к случайной величине ξ?

2.30 Что такое сходимость по распределению последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин к случайной величине ξ?

2.31 Что такое сходимость в среднем квадратичном последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин к случайной величине ξ?

2.32 К чему сходится при $n \to \infty$ последовательность случайных величин $\eta_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ в законе больших чисел, если ξ_k одинаково распределены?

2.33 Какова случайная величина $\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\xi_k - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$, если ξ_k независимы, одинаково распределены, $M\xi_k = \mu$, $D\xi_k = \sigma^2$?

2.34 Какой тип сходимости при $n \to \infty$ свойственен последовательности $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\xi_k - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$, если ξ_k независимы, одинаково распределены, $M\xi_k = \mu$, $D\xi_k = \sigma^2$?

3. Цепи Маркова и случайные процессы.

3.1 Пусть π_{ij} – вероятность перехода из i-го в j-е состояние в конечной однородной цепи Маркова за один шаг. Выберете верные равенства: (А) $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_{ij} = 1$, (Б) $\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_{ij} = 1$.

3.2 Пусть π_{ij} – вероятность перехода за k шагов из i-го состояния в j-е состояние в конечной однородной цепи Маркова. Выберете верные равенства: (А) $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_{i,j} = 1$, (Б) $\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_{i,j} = 1$.

3.3 Что можно сказать о строках матрицы переходных вероятностей в случае независимости состояний цепи Маркова?

3.4 Пусть $\begin{pmatrix} 1/2 & a \\ b & 1/5 \end{pmatrix}$ — матрица перехода за один шаг в цепи Маркова. Найти значения a, b.

3.5 Может ли $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ быть матрицей перехода в цепи Маркова?

3.6 Каким равенством в теории цепей Маркова связаны матрица перехода π_1 за один шаг и матрица перехода π_k за k шагов?

3.7 Пусть $\xi(t)$ – случайный процесс. Что такое двумерная функция распределения данного случайного процесса?

3.8 Пусть $\xi(t) = \nu + t$, где $t > 0$, ν – случайная величина, распределенная равномерно на отрезке $[0, 1]$. Чему равно математическое ожидание данного случайного процесса?

3.9 Пусть $\xi(t) = t\nu$, где $t > 0$, ν – случайная величина, распределенная нормально с параметрами $0, 1$ (по закону $\mathcal{N}(0, 1)$). Чему равна дисперсия данного случайного процесса?

3.10 Пусть $\xi(t)$ – случайный процесс с действительными значениями. Что такое корреляционная функция данного случайного процесса?

3.11 Пусть $\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$ — случайный процесс, $K(t, s)$ — его корреляционная функция. Всегда ли верно, что $K(t, s) = K(s, t)$?

3.12 Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс, $K(t, s)$ — его корреляционная функция. Всегда ли верно, что $K(t, t) \geqslant 0$?

3.13 Что такое непрерывность в среднем квадратичном случайного процесса $\xi(t)$?

3.14 Что такое дифференцируемость в среднем квадратичном случайного процесса $\xi(t)$?

3.15 Что такое интегрируемость по Риману в среднем квадратичном случайного процесса $\xi(t)$?

3.16 Какой случайный процесс $\xi(t)$ называется процессом с независимыми приращениями?

4. Основы математической статистики.

4.1 Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ^2. Найти значения констант a и b таких, что $a(\xi-b)$ имеет стандартное нормальное распределение с параметрами 0 и 1.

4.2 Пусть координаты $\xi_1,\ldots,\xi_n$ случайного вектора $\xi\in\mathcal{R}^n$ независимы и распределены по стандартному нормальному закону $\mathcal{N}(0,1)$. Как распределено скалярное произведение (ξ,a), если вектор a имеет координаты $(1,\ldots,1)$?

4.3 Пусть случайные величины $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$. Какая функция от $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ имеет распределение χ^2_n (Пирсона) с n степенями свободы?

4.4 Получена n-мерная выборка из распределения с плотностью вида $p(x)=\theta e^{-\theta x}$, $x>0$ (n реализаций независимых одинаково распределенных случайных величин). Как выглядит функция правдоподобия данной выборки?

4.5 Пусть $\big(t_1(\xi),t_2(\xi)\big)$ — интервальная оценка параметра θ. Что такое уровень доверия оценки?

4.6 Рассматривается интервальная оценка μ в нормальном распределении. Когда длина доверительного интервала меньше: когда значение $\sigma^2=1$ известно априори или когда используется выборочная дисперсия $\hat\sigma^2=1$ (при фиксированной выборке и фиксированном уровне доверия)?

4.7 По нормальной выборке объема n рассчитаны выборочные среднее $\hat\mu$ и дисперсия $\hat\sigma^2$ и построена интервальная оценка для μ с уровнем доверия γ. Когда длина интервала больше: при $n=100$ или при $n=200$ (при фиксированных $\hat\mu$, $\hat\sigma^2$, γ)?

4.8 Пусть статистика $t(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ является точечной оценкой значения функции $\tau(\theta)$. Что такое несмещенность оценки?

4.9 Пусть статистика $t(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ является точечной оценкой значения функции $\tau(\theta)$. Что такое состоятельность оценки?

4.10 Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – выборка из распределения с нулевым математическим ожиданием и неизвестной дисперсией. Будет ли статистика $s^2(\xi)=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^2$ несмещенной оценкой дисперсии?

4.11 Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ – выборка из нормального распределения с известным математическим ожиданием $\mu=1$ и неизвестной дисперсией. Будет ли статистика $s^2(\xi)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^2$ несмещенной состоятельной оценкой дисперсии?

4.12 Пусть $t(\xi)$ — несмещенная оценка параметра θ распределения ξ. Верно ли, что $at(\xi)+b$ — несмещенная оценка значения функции $\tau(\theta)=a\theta+b$?

4.13 Пусть $t(\xi)$ — несмещенная оценка параметра θ распределения ξ. Всегда ли верно, что $t^2(\xi)$ — несмещенная оценка значения функции $\tau(\theta)=\theta^2$?

4.14 Пусть ξ_1,ξ_2 —независимые случайные величины, распределенные по закону $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ с неизвестными параметрами. Является ли статистика $t(\xi)=\dfrac{1}{3}\xi_1^2+\dfrac{2}{3}\xi_2^2$ несмещенной оценкой σ^2?

4.15 Пусть $t_1(\xi), t_2(\xi)$ — несмещенные оценки минимальной дисперсии параметра θ распределения ξ. Верно ли, что $t_1(\xi) = t_2(\xi)$ для любых значений ξ?

4.16 Пусть $t_1(\xi)$ — эффективная оценка параметра μ нормального распределения, $t_2(\xi)$ — несмещенная оценка, не обладающая свойством эффективности. Сравнить по величине дисперсии $Dt_1(\xi)$ и $Dt_2(\xi)$ этих оценок?

4.17 Пусть $L(x, \theta)$ — функция правдоподобия. Какая оценка $\hat{\theta}(\xi)$ называется оценкой максимального правдоподобия?

ОБРАЗЕЦ ВАРИАНТА.

Фамилия________________________________. Группа_____________.

1. Известно, что наступление события A влечет наступление события B. Поставить знак неравенства между $P(A)$ и $P(B)$.	
2. Следует ли из попарной независимости событий их независимость в совокупности?	
3. Пусть $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$. Можно ли при этом условии утверждать, что всегда верно следующее: $P(A\|B) \geqslant P(A)$?	
4. Пусть $F(\cdot)$ есть функция распределения случайной величины ξ. Выразить через $F(x)$ следующие вероятности: $P(2\xi > x)$.	
5. Пусть существует $D\xi = \sigma^2 < \infty$. Чему равна $D(2-3\xi)$?	
6. Что такое сходимость по вероятности последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин к случайной величине ξ?	
7. Пусть π_{ij} – вероятность перехода за k шагов из i-го состояния в j-е состояние в конечной однородной цепи Маркова. Выберете верные равенства: (А) $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_{i,j} = 1$, (Б) $\sum\limits_{j=1}^{n} \pi_{i,j} = 1$.	
8. Что такое дифференцируемость в среднем квадратичном случайного процесса $\xi(t)$?	
9. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$. Какая функция от $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеет распределение χ^2_n (Пирсона) с n степенями свободы?	
10. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – выборка из нормального распределения с известным математическим ожиданием $\mu = 0$ и неизвестной дисперсией. Будет ли статистика $s^2(\xi) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2$ несмещенной состоятельной оценкой дисперсии?	