# Тест по курсу “Теория вероятностей и математическая статистика.” Июнь 2007 г.

1. **Основные понятия теории вероятностей.**

   1.1 Упростить выражение $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.

   1.2 Пусть $A$ и $B$ — два события. Найти выражение для множества тех исходов, при которых происходит а) ровно одно; б) хотя бы одно из событий $A$ и $B$.

   1.3 Совместны ли события $A$ и $\overline{A \cup B}$?

   1.4 Какое множество $\mathcal{F}$ подмножеств пространства элементарных исходов $\Omega$ называется алгеброй подмножеств?

   1.5 Дополните множество $\mathcal{F} = \Big\{\Omega, \{1,2,3\}, \{4\}\Big\}$ одним подмножеством так, чтобы оно стало алгеброй подмножеств пространства $\Omega = \{1,2,3,4\}$?

   1.6 Пусть $A, B, C$ – три произвольных события. Записать событие, заключающееся в том, что а) произошли все три события одновременно; б) произошло хотя бы одно из этих событий.

   1.7 Каким условиям должны удовлетворять события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, чтобы они образовали полную группу попарно несовместных событий?

   1.8 Пусть а) $A_n \subset A_{n+1}$; б) $A_n \supset A_{n+1}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$?

   1.9 Пусть $\mathcal{F}$ — алгебра подмножеств $\Omega$. Какое дополнительное условие надо наложить на $\mathcal{F}$ для того, чтобы $\mathcal{F}$ стала **сигма**-алгеброй?

   1.10 Какое свойство вероятности называется **сигма**-аддитивностью?

   1.11 При каком условии на события $A$ и $B$ имеет место равенство $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?

   1.12 Известно, что наступление события $A$ влечет наступление события $B$. Поставить знак неравенства между $P(A)$ и $P(B)$.

   1.13 Что такое а) попарная независимость; б) независимость в совокупности событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

   1.14 Пусть $0 < P(A), P(B) < 1$ и события $A, B$ независимы. Могут ли они быть несовместны?

   1.15 Известно, что $A$ и $B$ — независимые события. Верно ли, что события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы?

   1.16 Как определяется вероятность того, что произойдет событие $A$, при условии, что произошло событие $B$.

   1.17 Пусть события $A$ и $B$ являются независимыми, $P(B) \neq 0$. Чему равна $P(A|B)$?

   1.18 Написать формулу полной вероятности.

   1.19 Написать формулу Байеса.

   1.20 Пусть все упомянутые далее условные вероятности существуют. Всегда ли при этом условии верно следующее равенство: $P(\overline{A}\,|B) = 1 - P(A|B)$?

   1.21 Проведено $n$ независимых испытаний Бернулли, $p$ — вероятность единичного успеха. Чему равна вероятность того, что произошло **а) ровно** $k$ **успехов; б) не менее** $k$ **успехов**?

   1.22 Проведено $n$ независимых испытаний Бернулли, $p$ — вероятность единичного успеха. Чему равна вероятность того, что а) сначала было $k$ успехов, а потом $n-k$ неудач; б) произошло ровно $k$ успехов, причем два первых испытания закончились успехами?

   1.23 При каких условиях имеет место сходимость $C_n^k p^k q^{n-k} \longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$?

2. **Теория случайных величин.**

2.1 Какая функция $\xi(\cdot)$, заданная на пространстве элементарных исходов $\Omega$, называется случайной величиной?

2.2 Что такое функция распределения случайной величины $\xi$?

2.3 Пусть $F_k$ – функция распределения случайной величины $\xi_k$, $k = 1, 2$. Какое из утверждений верно:
(А) $F_1(x) \equiv F_2(x)$ влечет $P(\xi_1 = \xi_2) = 1$, (Б) $P(\xi_1 = \xi_2) = 1$ влечет $F_1(x) \equiv F_2(x)$, (В) неверно ни А, ни Б.

2.4 Пусть $F(\cdot)$ есть функция распределения случайной величины $\xi$. Выразить через значения $F(\cdot)$ следующие вероятности: $P(\xi = x); P(\xi > x)$

2.5 Пусть $P(\xi < 0) = P(\xi > 1) = 0$. В каких случаях функция $F(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ может быть функцией распределения:
(А) $F(x) = x^2$, (Б) $F(x) = 1 - x$, (В) $F(x) = 1 - e^{-x}$, (Г) ни в одном из случаев А,Б,В).

2.6 Известно, что $P(\xi < 0) = P(\xi > 1) = 0$ и при $x \in (0, 1)$ функция распределения случайной величины $\xi$ имеет следующий вид: $F(x) = (x^2 + 1)/4$. Чему равны $F(0)$ и $F(1)$?

2.7 Какие из указанных далее функций $p(\cdot)$ могут быть плотностью распределения (вне указанного интервала $p(x) = 0$):
(А) $p(x) = 1/x^2$, $x > 1$, (Б) $p(x)$ – периодическая функция, (В) $p(x) = 3-4x$, $0 < x < 1$, г) ни в одном из случаев (А),(Б),(В).

2.8 Пусть $p(x)$ – плотность распределения случайной величины $\xi$. Чему равна $F(x)$ – функция распределения $\xi$?

2.9 Пусть $p(x)$, $-\infty < x < +\infty$, есть плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины $\xi$. Чему равна $P(a < \xi < b), P(\xi \leqslant a)$?

2.10 Пусть $\xi$ — дискретная случайная величина и задано ее распределение: $P(\xi = x_k) = p_k$, $k = 1, 2, \ldots$ .При каком условии существует и чему равно $M\xi$?

2.11 Пусть $\xi$ — абсолютно непрерывная случайная величина, $p(x)$ — плотность ее распределения. При каком условии существует и чему равно $M\xi$?

2.12 Пусть случайная величина $\xi$ распределена а) дискретно; б) абсолютно непрерывно. Чему равно $Me^{\xi}$?

2.13 Пусть существуют $M\xi_1, \ldots, M\xi_n$; Выберите **все** верные утверждения: равенство $M(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = M\xi_1 + \cdots + M\xi_n$ имеет место (А) для любых таких случайных величин, (Б) для независимых в совокупности случайных величин, (В) если $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ при $i \neq j$.

2.14 Пусть существуют $M\xi_1, \ldots, M\xi_n$. Выберите **все** верные утверждения: равенство $M(\xi_1 \ldots \xi_n) = M\xi_1 \ldots M\xi_n$ имеет место (А) для независимых в совокупности случайных величин, (Б) для независимых попарно случайных величин, (В) если $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ при $i \neq j$.

2.15 Что такое дисперсия случайной величины $\xi$?

2.16 Пусть существует $D\xi = \sigma^2 < \infty$. Чему равна $D(2 - 3\xi)$?

2.17 Пусть $D\xi_i$ существуют. Выберите **все** верные утверждения:равенство $D(\xi_1+\cdots+\xi_n) = D\xi_1 + \cdots + D\xi_n$ имеет место (А) для любых таких случайных величин, (Б) для независимых в совокупности случайных величин, (В) если $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$ при $i \neq j$.

2.18 Что такое коэффициент корреляции случайных величин $\xi, \eta 2$ и какие значения он может принимать?

2.19 Что такое совместная функция распределения случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$?

2.20 При каком условии случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ а) независимы в совокупности; б) попарно ?

2.21 Пусть $p_{\xi,\eta}(x,y)$ — совместная плотность распределения случайных величин $\xi, \eta$. Как найти плотность $p_\xi(x)$ распределения случайной величины $\xi$?

2.22 Пусть $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$ — плотность распределения случайной величины $\xi$. Найти численные значения $M\xi, D\xi$, не вычисляя интегралов.

2.23 Чему равно математическое ожидание случайной величины равномерно распределенной в интервале $(-1, 1)$?

2.24 Пусть случайная величина $\xi$ распределена а) дискретно; б) абсолютно непрерывно. Чему равна характеристическая функция этой случайной величины?

2.25 Записать неравенство Коши–Буняковского для моментов случайной величины.

2.26 Что такое сходимость по вероятности последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин к случайной величине $\xi$?

2.27 Что такое сходимость по распределению последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин к случайной величине $\xi$?

2.28 Что такое среднеквадратичная сходимость последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ случайных величин к случайной величине $\xi$?

2.29 К чему сходится при $n \to \infty$ последовательность случайных величин $\eta_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ , если $\xi_k$ одинаково распределены, независимы, $M\xi_k = \mu$, $D\xi_k = \sigma^2$?

2.30 Как распределена случайная величина $\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\xi_k - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ , если $\xi_k$ независимы в совокупности, одинаково распределены, $M\xi_k = \mu$, $D\xi_k = \sigma^2$?

2.31 Какой тип сходимости при $n \to \infty$ свойственен последовательности $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$, если $\xi_k$ независимы в совокупности, одинаково распределены, $M\xi_k = \mu$, $D\xi_k = \sigma^2$?

2.32 Пусть $\xi$ —число успехов в $n$ независимых испытаниях Бернулли, $p = 1/2$ – вероятность успеха. Чему приближенно равна $P(k_1 < \xi < k_2)$ при больших $n$?

3. **Цепи Маркова и случайные процессы.**

3.1 Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ принимают значения из множества $X = \{x_1, \ldots, x_s\}$. При каком условии эти случайные величины образуют цепь Маркова?

3.2 Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ принимают значения из множества $X = \{x_1, \ldots, x_s\}$ и образуют конечную однородную цепь Маркова. Как определяется $\pi_{ij}^{(k)}$ – вероятность перехода за $k$ шагов из $i$-го состояния в $j$-ое состояние?

3.3 Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ образуют конечную однородную цепь Маркова, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ – матрица перехода за один шаг, $P(\xi_1 = 1) = 1/3$,$P(\xi_1 = 2) = 2/3$ – начальное распределение. Найти распределение на втором шаге (распределение случайной величины $\xi_2$).

3.4 Написать общий вид матрицы переходных вероятностей в случае независимости состояний конечной однородной цепи Маркова с $s$ состояниями.

3.5 Пусть $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ – матрица перехода за один шаг в конечной однородной цепи Маркова. Возможен ли переход за один шаг из $i$-го состояние в $j$-ое, если $i = 1, j = 2$?

3.6 Пусть заданы $\pi^{(k)}$ матрицы перехода за $k$ шагов в конечной однородной цепи Маркова при $k = 2, 3$. Как найти матрицу перехода за 7 шагов?

3.7 Пусть $\xi(t)$ – случайный процесс. Что такое двумерная функция распределения данного случайного процесса?

3.8 Пусть $\xi(t) = \nu + t$, где $t > 0$, $\nu$ – случайная величина, распределенная равномерно на отрезке $[0, 1]$. Чему равно математическое ожидание данного случайного процесса?

3.9 Пусть $\xi(t) = t\nu$, где $t > 0$, $\nu$ – случайная величина, распределенная нормально по закону $\mathcal{N}(0, 1)$. Чему равна дисперсия данного случайного процесса?

3.10 Пусть $\xi(t)$ – случайный процесс с **действительными** значениями. Что такое корреляционная функция данного случайного процесса?

3.11 Пусть $\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$ — комплексный случайный процесс, $K(t, s)$ — его корреляционная функция. Всегда ли можно утверждать, что $K(t, s) \equiv K(s, t)$?

3.12 Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс, $K(t, s)$ — его корреляционная функция. Всегда ли верно, что $K(t, t) \geqslant 0$?

3.13 Какой случайный процесс $\xi(t)$ называется процессом с независимыми приращениями?

3.14 Пусть $\xi(t)$ – процесс Пуассона, начинающийся в нуле. Как распределено сечение $\xi(t)$ случайного процесса в фиксированный момент времени $t = t_0$?

4. **Основы математической статистики.**

4.1 Пусть случайная величина $\xi$ имеет нормальное распределение с параметрами $\mu$ и $\sigma^2$. Найти значения констант $a$ и $b$ таких, что $a(\xi - b)$ имеет стандартное нормальное распределение с параметрами 0 и 1.

4.2 Пусть координаты $\xi_1, \dots, \xi_n$ случайного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ независимы и распределены по стандартному нормальному закону $\mathcal{N}(0,1)$. Как распределено скалярное произведение $(\xi, a)$, если вектор $a$ имеет в некотором базисе координаты $(1, \dots, 1)$?

4.3 Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$. Какая функция от $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеет распределение $\chi^2_n$ (Пирсона) с $n$ степенями свободы?

4.4 Пусть $\xi = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ – случайный вектор с независимыми стандартно нормально распределенными координатами, $e \in \mathbb{R}^n$ – фиксированный вектор с единичной нормой, $\Pi_e$ – ортогональный проектор на направление, заданное вектором $e$. Как распределены следующие случайные величины: $(\xi, e)$; $(\xi, e)^2$; $\|(I - \Pi_e)\xi\|^2$; $\|\Pi_e \xi\|^2$; $\frac{(\xi,e)}{\sqrt{n-1}\|(I-\Pi_e)\xi\|}$?

4.5 Получена $n$-мерная выборка из распределения с плотностью $p(x) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$ ($n$ реализаций независимых одинаково распределенных случайных величин). Как выглядит функция правдоподобия данной выборки?

4.6 Пусть $\Big(t_1(\xi), t_2(\xi)\Big)$ — интервальная оценка параметра $\theta$. Что такое уровень доверия оценки?

4.7 Когда длина интервальной оценки $\mu$ в нормальном распределении меньше: когда значение $\sigma^2 = 1$ известно априори или когда используется выборочная дисперсия $\hat{\sigma}^2 = 1$ (при фиксированных выборке и уровне доверия)?

4.8 Дана выборка объема $n$ из нормального распределения с неизвестными $\mu, \sigma^2$. Когда длина интервальной оценки $\mu$ больше: при $n = 100$ или $n = 200$ (при фиксированных значениях выборочных среднего $\hat{\mu}$ и дисперсии $\hat{\sigma}^2$ и уровне доверия $\gamma$)?

4.9 Пусть статистика $t(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ является точечной оценкой значения функции $\tau(\theta)$. Что такое несмещенность оценки?

4.10 Пусть статистика $t(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ является точечной оценкой значения функции $\tau(\theta)$. Что такое состоятельность оценки?

4.11 Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – выборка из распределения с неизвестной дисперсией, $\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Будет ли $s^2(\xi) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \overline{\xi})^2$ несмещенной оценкой дисперсии?

4.12 Пусть $t(\xi)$ — несмещенная оценка значения параметра $\theta$ распределения $\xi$. Всегда ли верно, что $t^2(\xi)$ — несмещенная оценка значения функции $\theta^2$?

4.13 Пусть $t_1(\xi), t_2(\xi)$ — несмещенные оценки значения параметра $\theta$ с минимальной дисперсией. Какие из утверждений верны:
(А) $t_1(\xi) = t_2(\xi)$ для любых значений $\xi$, (Б) $P_\theta\Big(t_1(\xi) = t_2(\xi)\Big) = 1$, (В) верны и А, и Б, (Г) неверно ни А, ни Б?

4.14 Пусть $t_1(\xi)$ — эффективная оценка значения параметра $\mu$ нормального распределения, $t_2(\xi)$ — несмещенная оценка, не обладающая свойством эффективности. Сравнить по величине дисперсии $Dt_1(\xi)$ и $Dt_2(\xi)$ этих оценок.

4.15 Пусть $L(x, \theta)$ — функция правдоподобия. Какая оценка $\hat{\theta}(\xi)$ называется оценкой максимального правдоподобия?

Терпения перепечатывать формулировки номеров хватило только на первый раздел)
Остальные смотри выше ↑
Если есть комметарии, пиши на khokholikov@yandex.ru

**Основные понятия теории веростностей**

1.1. Упростить выражение: $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}}=A\cup B$

1.2. Даны два события $A, B$. Найти выражение для множества тех исходов, при которых происходит:

a) ровно одно: $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$ (надо ли включать случай, когда события несовместны?)

b) хотя бы одно: $A\cup B$

1.3. Совместны ли события $A, \overline{A\cup B}$ ?

$A\cap(\overline{A\cup B})=A\cap(\overline{A}\cap\overline{B})=(A\cap\overline{A})\cap\overline{B}=\varnothing$

1.4. Какое множество $F$ всех подмножеств $\Omega$ называется алгеброй множеств?

a) $A, B\in F\Rightarrow A\cup B\in F$

b) $A\in F\Rightarrow\overline{A}\in F$

1.5. Дополните множество $F=\{\Omega,\{1,2,3\},\{4\}\}$ одним подмножеством так, чтобы оно стало алгеброй подмножеств пространства $\Omega=\{1,2,3,4\}$.

$\overline{\Omega}=\varnothing\Rightarrow\varnothing$

1.6. $A, B, C$ - произволные события. Записать событие, заключающееся в том, что:

a) Произошли все три события одновременно: $A\cap B\cap C$

b) Произошло хотя бы одно из этих событий: $A\cup B\cup C$

1.7. Каким условиям должны удовлетворять события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, чтобы они образовали полную группу попарно несовместных событий?

a) $A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$

b) $\sum_{i=1}^{n} A_i=\Omega$

1.8. Пусть а) $A_n\subset A_{n+1}$, б) $A_n\supset A_{n+1}$ для всех $n=1,2,\ldots$. Чему равен $\lim_{n\to\infty} A_n$ ?

a) $\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty}\bigcup_1^n A_n=\bigcup_1^\infty A_n$

b) $\lim_{n\to\infty} A_n=\bigcap_1^\infty A_n$

1.9. Пусть $F$ - алгебра подмножеств $\Omega$. Какое дополнительное условие надо наложить на $F$, чтобы $F$ стала сигма-алгеброй?

Для всякой последовательности событий $A_j\in F$ $A=\bigcup_1^\infty A_j\in F$, т.е. является событием.

1.10. Какое свойство вероятности называется сигма-аддитивностью?

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

1.11. При каком условии на события $A, B$ имеет место равенство $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ ?

$A\cap B=\varnothing$

1.12. Известно, что наступление события $A$ влечет наступление события $B$ ( $(A\subset B)$ ).
Тогда $P(A)\leq P(B)$

1.13. Что такое а) попарная независимость и б) независимость в совокупности событий

$A_1, A_2, \dots, A_n$ ?

a) $\forall i \neq j \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i) P(A_j)$

b) События $A_1, \dots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если при любом выборе различных событий $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ из данной совокупности выполняется равенство $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_n})$

1.14. Пусть $0 < P(A), P(B) < 1$ и события $A, B$ независимы. Могут ли они быть несовместны?

Если $A \cap B = \varnothing$ (события несовместны), то $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0 = P(A) P(B)$, но по условию $0 < P(A), P(B) < 1$, т.е. ответ НЕТ.

1.15. Известно, что $A, B$ - независимые события. Верно ли, что события $\overline{A}, \overline{B}$ также независимы?

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) P(B) = 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A)) =$$
$$= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\overline{A}) P(\overline{B})$$

1.16. Как определяется вероятность того, что произойдет $A$ при условии, что произошло $B$ ?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1.17. Пусть события $A, B$ являются независимыми, $P(B) \neq 0$. Чему равна $P(A|B)$ ?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) P(B)}{P(B)} = P(A)$$

1.18. Написать формулу полной вероятности.

$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$, $A_1, \dots, A_n$ образуют полную группу.

1.19. Написать формулу Байеса

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) P(A_i)}$$

1.20. Пусть все упомянутые далее условные вероятности существую. Всегда ли при этом условии верно следующее равенство: $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$ ?

Да, потому что это свойство условной вероятности.

1.21. Проведено $n$ независимых испытаний Бернулли.

a) Вероятность того, что произошло ровно $k$ успехов: $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

b) -”- не менее $k$ успехов: $p = \sum_{m=k}^{n} C_m^m P^m q^{n-m} = p_n(k) + p_n(k+1) + \dots + p_n(n)$

c) -”- менее $k$ успехов: $p = \sum_{m=0}^{m=k-1} C_n^m p^m q^{n-m}$

d) -”- более $k$ успехов: $p = \sum_{m=k+1}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$

e) -”- не более $k$ успехов: $p = \sum_{m=0}^{k} C_n^m p^m q^{n-m}$

1.22. Проведено $n$ независимых испытаний Бернулли. Чему равна вероятность того, что

a) сначала было $k$ успехов, а потом $n-k$ неудач: $p=p^k q^{n-k}$

b) произошло ровно $k$ успехов, причем два первых испытания закончились успехами: $p=p^2 C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} q^{n-2-k+2}=C_{n-2}^{k-2} p^k q^{n-k}$

1.23. При каких условиях имеет место сходимость $C_n^k p^k q^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} a^{-k}$ ?

Если $n\to\infty,\ p\to 0$, причем $pn=\lambda=const$.

**Теория случайных величин**

2.1. Случайная величина – однозначная функция $\xi=\xi(\omega)$, вещественная и определенная на $\Omega$ ? которая $\forall\,\omega\in\Omega$ ставит в соответствие конечное число $X=\xi(\omega)\in\mathbb{R}$, так что $\forall\, x\in\mathbb{R}\{\omega:\ \xi(\omega)<x\}\in F$, т.е. $\exists P(\omega:\ \xi(\omega)<x)$

2.2. Функция распределения: $F_\xi(x)=P(\xi<x),\ -\infty<x<+\infty$

2.3. Б

2.4. $F(\cdot)$ - функция распределения $\xi$ : 1) $P(\xi=x)=F(x+0)-F(x)$,
2) $P(\xi>x)=1-P(\xi\le x)=1-F(x+0)$

2.5. А, В

2.6. $P(\xi<0)=p(\xi>1)=0$, $F(0)=0,\ F(1)=1/2$

2.7. А

2.8. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(y)\,dy$

2.9. $P(a<\xi<b)=F(b)-F(a)=\int\limits_a^b p(x)\,dx$, $P(\xi\le a)=F(a)=\int\limits_{-\infty}^{a} p(x)\,dx$

2.10. $P(\xi=x_k)=p_k$ $M\xi=\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ при условии, что $\exists M|\xi|=\sum\limits_1^{\infty} |x_k| p_k<\infty$

2.11. $M\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx$ при условии, что $M|\xi|=\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\,p(x)\,dx<\infty$

2.12. Дискретно: $Me^{\xi}=\sum\limits_{i=1}^{\infty} e^{x_i} p_i$, если ряд сходится абсолютно

Непрерывно: $Me^{\xi}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^x\,p(x)\,dx$, если ряд сходится абсолютно

2.13. А, Б, В

2.14. А

2.15. Дисперсия $D\xi=M(\xi-M\xi)^2$, если $\exists M(\xi-M\xi)^2$

2.16. $D(2-3\xi)=9\mathrm{D}\xi=9\sigma^2$

2.17. Б, т.к. из независимости в совокупности следует попарная независимость

2.18. Коэффициент корреляции $r_{ij}=\frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi_i D\eta}},\ |r_{ij}|\le 1$

2.19. $F(x_1,\dots,x_n)=P\{\xi_1<x_1,\xi_2<x_2,\xi_3<x_3,\dots,\xi_n<x_n\}$ - совместная функция распределения.

2.20.

a) В совокупности $\forall\, x_1,\dots,x_n$ события $\{\xi_1<x_1\}\dots\{\xi_n<x_n\}$ независимы в совокупности, т.е. $P\{(\xi_1<x_1)\cap\dots\cap(\xi_n<x_n)\}=P(\xi_1<x_1)P(\xi_2<x_2)\dots P(\xi_n<x_n)$ или $F(x_1,\dots,x_n)=F_{\xi_1}(x_1)\dots F_{\xi_n}(x_n)$

b) Попарно $\forall\, i\ne j$ $P\{(\xi_i<x_i)\cap(\xi_j<x_j)\}=P(\xi_i<x_i)P(\xi_i<x_i)$

2.21. $P_{\xi\eta}(x,y)$ - совместная, $p_{\xi}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy$ - маргинальная

2.22. $M(\xi)=1,\ \ D\xi=4$

2.23. $M\xi=\frac{a+b}{2}=\frac{-1+1}{2}=0$

2.24.а) дискретно: $f_{\xi}(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k$ , б) непрерывно: $f_{\xi}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)\,dx$

2.25. $M\xi\eta\le\sqrt{M\xi^2 M\eta^2}$

2.26.По вероятности: $\forall\epsilon\ \ \lim\limits_{n\to\infty} P\{|\xi_n-\xi|>0\}=0$

2.27.По распределению: $F_{\xi_n}(x)\underset{n\to\infty}{\to}F_{\xi}(x)$ во всех точках, где $F(x)$ непрерывна

2.28.Среднеквадратичная сходимость: $M(\xi_n-\xi)^2\underset{n\to\infty}{\to}0$ , если $\exists M(\xi_n-\xi)^2$

2.29. $\eta_n=\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\to\mu$

2.30.Распределена стандартно нормально $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\,dz$

2.31.Сходимость по распределению $N(0,1)$

2.32. $P\{k_1<\xi<k_2\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{(k_1-np)/\sqrt{npq}}^{(k_2-np)/\sqrt{npq}} e^{-x^2/2}\,dx$

**Цепи Маркова и случайные процессы**

3.1.В последовательности $n$ испытаний вероятность исхода в любом испытании зависит от исхода $(s-1)$ -го испытания и не зависит от исходов испытаний с номерами $(s-2),(s-3),\ldots,1$ .

3.2. $\pi_{ij}^{(k)}=\pi_{ij}^{k}$ , где $\pi_{ij}=P(\xi_n|\xi_{n-1}=x_{i_{n-1}}),\ \ \pi_{ij}^{(k)}=P(\xi_{k+m}=x_j|\xi_m=x_i)$

$p_{ij}^{n}=\sum\limits_{k=1}^{N} p_{ik}^{m} p_{kj}^{n-m}$ , $m$ - любое целое число от 1 до $n-1$

3.3. $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{1}{3} & 0+\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ - распределение на 2 шаге

3.4.Независимые состояния:

$$\pi_1=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \ldots & a_s\\ a_1 & a_2 & \ldots & a_s\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_1 & a_2 & \ldots & a_s\end{pmatrix}$$

3.5. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1/2 & 2/3\end{pmatrix}$ вероятность $p_{ij}=p_{12}=0\Rightarrow$ невозможен

3.6. $\pi^7=\pi^{2+2+3}=\pi^2\cdot\pi^2\cdot\pi^3$

3.7.Двухмерная функция случайного вектора $\langle\xi(t_1),\xi(t_2)\rangle$ :
$F(t_1,x_1,t_2,x_2)=P\{\xi(t_1)<x_1,\xi(t_2)<x_2\}$

3.8.Т.к. надо найти математическое ожидание суммы с.в. и константы, то получится $M\nu+t=1/2+t$

3.9.Т.к. надо найти дисперсию произведения с.в. на константу, получится $D\nu t=t^2 D\nu=t^2$

3.10. $K(t,s)=M((\xi(t)-M\xi(t))(\xi(s)-M\xi(s)))$

3.11.Не всегда

3.12.Да, поскольку дисперсия всегда $>0$ .

3.13. $\xi(t)$ называется случайным процессом с независимыми приращениями, если $\forall 0\le t_1<t_2<\ldots<t_n:\ \xi(t_2)-\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ независимы в совокупности.

3.14. $\frac{(\lambda t_0)^k}{k!}e^{-\lambda t_0}$ - Пуассон

**Основы математической статистики**

4.1.Из интервального оценивания если $\xi_k\in N(\mu,\sigma^2)$ , то $\xi_k^0=\frac{\xi_k-\mu}{\sigma}\in n(0,1)\Rightarrow a=\frac{1}{\sigma},\ \ b=\mu$

4.2. $\xi\in N(0,1);\ \ a=(1,\ldots,1)$

$(\xi,a)\in N(\mu_*,\sigma_*^2)\to|\mu_*=0,\ \ \sigma_*^2=\underbrace{1^2\cdot 1+\ldots+1^2\cdot 1}_{n}=n\Rightarrow N(0,n)$

4.3. $\xi_n\in N(0,1)$ $\chi^2-$ распределение имеет $\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2=\chi^2$

4.4. $(\xi,e)\in N(0,1)$

$(\xi,e)^2\in\chi_n^2$ - Пирсона

$\|(I-\Pi_e)\xi\|^2\in\chi_{n-1}^2$

$\|\Pi_e\xi\|^2\in\chi_m^2$

$\frac{(\xi,e)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\|(I-\Pi_e)\xi\|^2}}\in T_{n-1}$ - Стьюдента

4.5. $L(x,\theta)=\theta e^{-\theta x},x>0$

4.6.Уровень доверия $\gamma=P_\theta(t_1(\xi)<\theta<t_2(\xi)),\ \ \theta\in\Theta$

4.7.Когда априорно задана дисперсия

4.8.Ширина интервала: $2\varepsilon\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}\Rightarrow$ при $n=100$ ширина больше

4.9.Несмещенность оценки: $\mu_\theta(t_\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}t(x)L(x,\theta)\,dx=\tau(\theta)$

4.10.Состоятельность оценки: $P_\theta(|t(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_3)-\tau(\theta)|>\varepsilon)\underset{n\to\infty}{\to}0$ , т.е. сходится по вероятности

4.11.Будет

4.12.Не всегда

4.13.Б

4.14. $D_{эфф}<D_{несмещ}$

4.15.Значение $\theta=\hat{\theta}$ , при котором функция правдоподобия имеет максимум, называется оценкой максимального правдоподобия. Она не обладает несмещенностью, но состоятельна.