Ответы на тест по курсу "Теория вероятностей и математическая статистика". Июнь 2004 года

1. Основные понятия теории вероятностей.

1.1
$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A \cup B}} = A \cup B$$

1.2
$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B$$

1.3
$$A \cap (\overline{A \cup B}) = A \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cap \overline{B} = \emptyset \cap \overline{B} = \emptyset$$

$\Rightarrow$ события несовместны

1.4 Множество $\mathcal{F}$ называется алгеброй подмножеств, если оно замкнуто относительно операций $A \cup B$ и $\overline{A}$, то есть
1) из $A, B \in \mathcal{F}$ следует $A \cup B \in \mathcal{F}$
2) из $A \in \mathcal{F}$ следует $\overline{A} \in \mathcal{F}$

1.5 $\emptyset$, т.к. $\overline{\Omega} = \emptyset$

1.6 Верно, если алгебра является непустой.

1.7 Не может.

1.8 $\Omega \setminus (A + B)$

1.9 $\mathcal{F}$ является σ-алгеброй, если из $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots$ следует

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

1.10 Вероятность $P(\cdot)$ обладает σ-аддитивностью, если

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

1.11 События A и B несовместны, т.е. $A \cap B = \emptyset$

1.12 $P(A) \leqslant P(B)$

1.13 Не всегда. Должно выполняться условие $B \subset A$, т.е. $P(B) \leqslant P(A)$

1.14 События A и B независимы, если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

1.15 $P(A \cap B) = 0$, т.к. события несовместны, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, т.к. события независимы. Отсюда следует, что $\min(P(A), P(B)) = 0$

1.16 Следует.

1.17 Не следует (см. пример Берштейна).

1.18

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$$

$$1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\overline{A})P(\overline{B})$$

$\Rightarrow$ События $\overline{A}$ и $\overline{B}$ независимы.

1.19

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1.20

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

1.21 Пусть $\{A_i, i = 1, 2, \ldots\}$ - полная группа попарно несовместных событий, а $B \in \mathcal{F}$ - некоторое событие, $P(B) > 0$. Тогда

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$

1.22 Из $P(B \cap A_k) = P(A_k|B)P(B) = P(B|A_k)P(A_k)$ следует

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}$$

1.23

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

1.24 $n \to \infty, p \to 0$, причём $np = \lambda = const$

2. Теория случайных величин.

2.1 Случайной величиной называется вещественная функция $\xi(\omega)$, такая, что для любого вещественного x, множество $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$, т.е. событие.

2.2 Вероятность $P(\{\xi(\omega) < x\}) = F_\xi(x)$ называется функцией распределения случайной величины ξ.

2.3 Могут.

2.4

$$P(\xi = x) = F(x+0) - F(x), P(\xi > x) = 1 - F(x+0)$$

2.5

$$F(x) = F(x-0) \equiv \lim_{x_k \uparrow x} F(x_k)$$

2.6 $F(1) = 1/2$, т.к. функция распределения непрерывна слева.

2.7 $F(x) = 0$ при $x < 0$, т.к. функция распределения - неубывающая функция.

2.8 Может. В точке, в которой $F(x)$ испытывает скачок.

2.9
$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy$$

2.10
$$P(a < \xi < b) = \int_{a}^{b} p(y)dy$$

2.11
$$\mathsf{M}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

2.12
$$\mathsf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

2.13 Может. См. "Петербургскую игру".

2.14 Может.

2.15 Может. Если ξ - непрерывная случайная величина, то она может принимать отличные от 0 значения в счётном множестве точек.

2.16 $\mathsf{M}(2\xi + 3) = 2\mathsf{M}\xi + 3 = 2a + 3$

2.17 Всегда.

2.18 При условии, что случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности.

2.19 Дисперсией называется центральный момент второго порядка:

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}(\xi - \mathsf{M}\xi)^2$$

2.20 $\mathsf{D}(3\xi + 2) = 9\mathsf{D}\xi = 9\sigma^2$

2.21 Не всегда. Только если эти величины попарно независимы.

2.22 $\mathrm{cov}(\xi_1\xi_2) = \mathsf{M}(\xi_1 - \mathsf{M}\xi_1)(\xi_2 - \mathsf{M}\xi_2) = \mathsf{M}\xi_1\xi_2 - \mathsf{M}\xi_1\mathsf{M}\xi_2$

2.23 Вероятность $P(\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2\}) = F_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)$ называется совместной функцией распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2.

2.24 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)\ldots F_{\xi_n}(x_n)$

2.25 $p_\xi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x, y)\ dy$

2.26 $\mathsf{M}\xi = 1, \mathsf{D}\xi = 4$

2.27 0

2.28 Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция вещественной переменной

$$f_\xi(t) = \mathsf{M}e^{i\xi t}$$

2.29 Если $\mathsf{M}|\xi|^2$ конечно, то для любого $\varepsilon > 0$

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{M}|\xi|^2}{\varepsilon^2}$$

2.30 Если существуют $\mathsf{M}\xi^2$ и $\mathsf{M}\eta^2$, то

$$(\mathsf{M}\xi\eta)^2 \leqslant \mathsf{M}\xi^2\mathsf{M}\eta^2$$

2.31 Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится к случайной величине ξ по вероятности, если $\forall\varepsilon > 0: \lim\limits_{n\to\infty} P\{|\xi - \xi_n| > \varepsilon\} = 0$

2.32 Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится к случайной величине ξ по распределению, если $\lim\limits_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$

2.33 Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится к случайной величине ξ в среднем квадратичном, если $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{M}|\xi_n - \xi|^2 = 0$ или $\operatorname*{l.i.m}\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$

2.34 $\mu = \mathsf{M}\xi_k$

2.35 Нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 1)$

3. Цепи Маркова и случайные процессы.

3.1 1

3.2 1

3.3 Все строки матрицы одинаковые, т.к. последующее состояние не зависит от предыдущего.

3.4 $a = 1/2$, т.к. сумма элементов строки должна быть равна 1.

3.5 Не может, т.к. сумма элементов строки должна быть равна 1.

3.6 $\pi_k = \pi_1^k$

3.7 Двумерной функцией распределения случайного процесса $\xi(t)$ называется функция распределения случайного вектора $(\xi(t_1), \xi(t_2))$:

$$F(t_1, x_1; t_2, x_2) = P\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2\}$$

3.8 Корреляционной функцией случайного процесса $\xi(t)$ называется функция

$$K(t, s) = \mathsf{M}(\xi(t) - \mathsf{M}\xi(t))(\overline{\xi(s)} - \mathsf{M}\overline{\xi(s)})$$

3.9 Не всегда.

3.10 Всегда. $K(t,t) = \mathsf{M}|\xi(t) - \mathsf{M}\xi(t)|^2 \geqslant 0$

3.11 Винеровский процесс.

3.12 Процесс Пуассона.

3.13 Случайный процесс $\xi(t)$ называется непрерывным в среднем квадратичном в точке t, если $\mathsf{M}|\xi(t+h) - \xi(t)|^2 \to 0$ при $h \to 0$, или, иначе говоря, $\xi(t) = \underset{h\to 0}{\text{l.i.m.}}\, \xi(t+h)$

3.14 Случайный процесс $\xi(t)$ называется дифференцируемым в среднем квадратичном в точке t, если существует с.к. предел $\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}$ при $h \to 0$

3.15 Случайный процесс $\xi(t)$ называется интегрируемым по Риману в среднем квадратичном на $[a,b]$, если последовательность римановских интегральных сумм $\sum\limits_{[a,b]} \xi(t_k)\delta t_k$ с.к сходится при $\max\limits_k \delta t_k \to 0$

3.16 Случайный процесс $\xi(t)$ называется процессом с независимыми приращениями, если для любых $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины $\xi(t_i) - \xi(t_{i-1}), i = 1, 2, \ldots, n$, независимы в совокупности.

4. <u>Основы математической статистики.</u>

4.1 $a = 1/\sigma, b = \mu$

4.2 $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2$

4.3 Является.

4.4 Не могут.

4.5 Не может, т.к. является произведением распределений или плотностей распределений вероятности.

4.6 $P\{t_1(\xi) < \theta < t_2(\xi)|\theta\} = \gamma$, γ - уровень доверия оценки.

4.7 При известной дисперсии.

4.8 При большем объеме выборки, т.к. при $n \to \infty$ длина доверительного интервала убывает $\sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

4.9 Оценка $t(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ называется несмещённой, если

$$\mathsf{M}t(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \tau(\theta)$$

4.10 Оценка $t(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ называется состоятельной, если $t_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \tau(\theta)$ (сходимость по вероятности)

4.11 Является.

$$\mathsf{M}t(\xi) = \mathsf{M}(\frac{1}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2) = \frac{1}{3}\mathsf{M}\xi_1 + \frac{2}{3}\mathsf{M}\xi_2 = \frac{1}{3}\mu + \frac{2}{3}\mu = \mu$$

4.12 Верно.

$$\mathsf{M}(at(\xi) + b) = a\mathsf{M}t(\xi) + b = a\theta + b = \tau(\theta)$$

4.13 Неверно в общем случае. Верно при $k = 0$ и $k = 1$.

$$\mathsf{M}t^k(\xi) \neq (\mathsf{M}t(\xi))^k = \theta^k = \tau(\theta)$$

4.14 Не является, если $\mu \neq 0$

$$\mathsf{M}t(\xi) = \frac{1}{3}\mathsf{M}\xi_1^2 + \frac{2}{3}\mathsf{M}\xi_2^2 = \frac{1}{3}(\mathsf{D}\xi_1 + (\mathsf{M}\xi_1)^2) + \frac{2}{3}(\mathsf{D}\xi_2 + (\mathsf{M}\xi_2)^2) = \sigma^2 + \mu^2 \neq \sigma^2$$

4.15 Верно.

4.16 $\mathsf{D}t_1(\xi) \leqslant \mathsf{D}t_2(\xi)$, т.к. эффективная оценка является несмещённой оценкой с минимальной дисперсией, а оценка $t_2(\xi)$ может и не обладать этим свойством.

4.17 Оценка $\hat{\theta}(\xi)$ называется оценкой максимального правдоподобия, если функция $\text{Ł}(x, \theta)$ имеет максимум при $\theta = \hat{\theta}(\xi)$