вектор $\hat{B}$ с собственным значением $b \Rightarrow \hat{A}|b\rangle \neq a|b\rangle$

$0 = (\hat{A}\hat{H} - \hat{H}\hat{A})|b\rangle = \hat{A}E_b|b\rangle - \hat{H}\hat{A}|b\rangle \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{H}\hat{A}|b\rangle = E_b\hat{A}|b\rangle \\ \hat{H}|b\rangle = E_b|b\rangle \end{cases}$$

$\Rightarrow$ у $\hat{H}$ два собственных вектора, соответствующих одному собственному значению ч.т.д.

② $I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dx = \frac{1}{2\pi}\oint\sqrt{2mE}\,dx = \hbar(n+\frac{1}{2})$

$\frac{1}{2\pi}\sqrt{2mE}\,2a = \hbar(n+1/2)$

$E = \left(\frac{\hbar\pi(n+1/2)}{a}\right)^2\frac{1}{2m}$

Точное решение для ямы $E = \left(\frac{\pi n\hbar}{a}\right)^2\frac{1}{2m}$

- спектр уровней в квазиклассическом приближении

$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}$

в сферических координатах: $H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} - \frac{\alpha}{r} = E$

$$\begin{cases} p_\varphi = const = L_z \\ E = const \\ p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = const = \vec{L}^2 \end{cases}$$

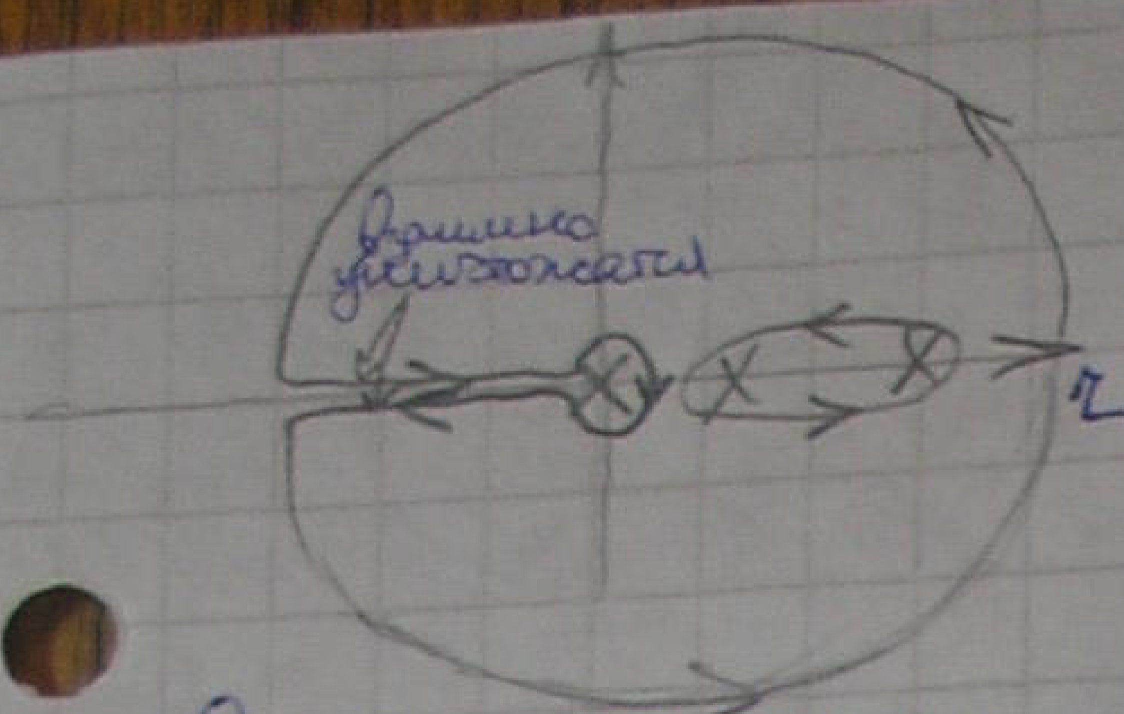
где есть сохраняющиеся величины возникают квантовые числа

переменные действие:

$I_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi\,d\varphi = p_\varphi = L_z$

$I_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint p_\theta\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\oint d\theta\sqrt{\vec{L}^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}}$

$I_r = \frac{1}{2\pi}\oint p_r\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\oint dr\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{\vec{L}^2}{2mr^2}\right)}$



Особые точки: ∞, 0 – полюс I порядка (ф-ция ведёт себя как $\frac{1}{r}$)

точки поворота

Интеграл рисуем вокруг точки поворота

$\Rightarrow I_r = 2\pi i\left(\text{Выч}(\infty) - \text{Выч}(0)\right)$ (в другую сторону вокруг)

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{2m\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r}\right)} = i\frac{\sqrt{2m|E|}}{2\pi}\sqrt{1 - \frac{L^2}{2mEr^2} + \frac{\alpha}{Er}} = i\frac{\sqrt{2m|E|}}{2\pi}\left(1 + \frac{\alpha}{2Er} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow \text{Выч}(\infty) = \frac{i}{2\pi}\sqrt{2m|E|}\,\frac{\alpha}{2E}$$

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{2m\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r}\right)} = \frac{i}{2\pi}\sqrt{2m\frac{L^2}{2mr^2}}\cdot\sqrt{1 + O(r)} = \frac{i}{2\pi}\frac{L}{r}\left(1 + \dots\right)$$

$\Rightarrow \text{Выч}(0) = -\frac{i}{2\pi}L$ (должны учитывать аргумент)

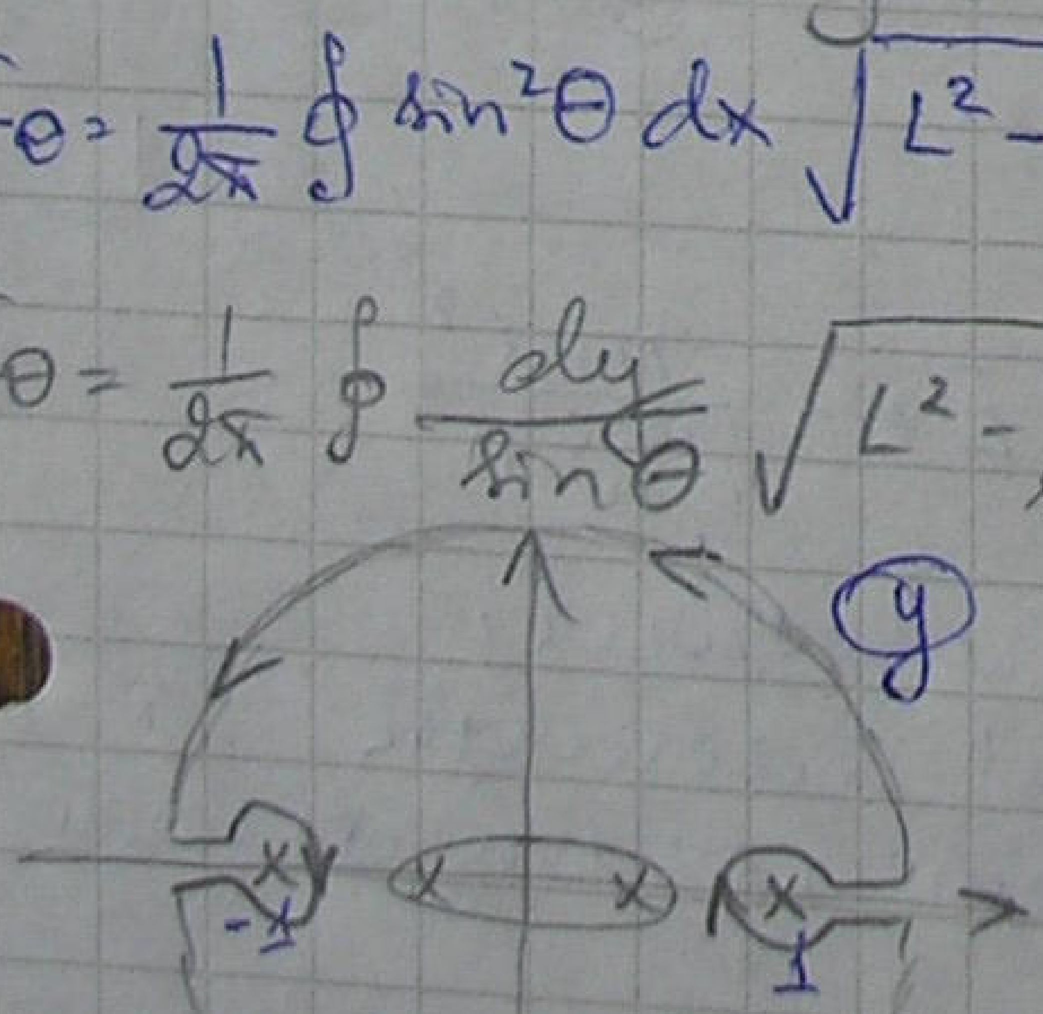
$$I_r = 2\pi i\cdot\left(\frac{i}{2\pi}\sqrt{2m|E|}\,\frac{\alpha}{2E} + \frac{i}{2\pi}L\right) = -L - \frac{\sqrt{2m|E|}\cdot\alpha}{2E}$$

для I_θ: $x = \operatorname{ctg}\theta$, $dx = -\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta$, $\frac{1}{\sin^2} = 1 + \operatorname{ctg}^2$

$y = \cos\theta$, $dy = -\sin\theta\, d\theta$

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint \sin^2\theta\, dx\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}} = \frac{1}{2\pi}\oint dx\sqrt{L^2\sin^4\theta - L_z^2\sin^2\theta}$$

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint\frac{dy}{\sin\theta}\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}} = \frac{1}{2\pi}\oint\frac{dy}{1-y^2}\sqrt{L^2(1-y^2) - L_z^2}$$



Особые (·): ∞

± 1 – полюса I порядка

2(·) ветвления

$$L^2(1-y^2) = L_z^2 \Rightarrow L^2y^2 = L^2 - L_z^2 \Leftrightarrow y^{\text{ветвл}} = \pm\sqrt{1 - L_z^2/L^2}$$

$$I_\theta = 2\pi i\left(\text{Выч}(\infty) - \text{Выч}(1) - \text{Выч}(-1)\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-y^2}\sqrt{L^2(1-y^2) - L_z^2} = -\frac{i}{2\pi}L\frac{1}{y} + \dots$$

$$\text{Выч}(\infty) = -\frac{i}{2\pi}L$$

$$\text{Выч}(1) = \lim_{y\to 1} f(y)\cdot(y-1) = -\frac{i}{4\pi}|L_z|$$

$$\text{Выч}(-1) = -\frac{i|L_z|}{4\pi}$$

$$\text{Выч}(1) + \text{Выч}(-1) = -\frac{i}{2\pi}|L_z|$$

$$I_\theta = L - L_z$$

$$I_\varphi = L_z$$

Заметим, что $L = I_\theta + I_\varphi$

$$I_r + I_\theta + I_\varphi = \frac{\sqrt{2m|E|}\cdot\alpha}{2|E|} = \frac{\sqrt{m}\cdot\alpha}{\sqrt{2|E|}}$$

$$\sqrt{2|E|} = \frac{\sqrt{m}\cdot\alpha}{I_r + I_\theta + I_\varphi}$$

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(I_r + I_\theta + I_\varphi)^2}$$

$$I_r = \hbar\left(n_r + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$I_\theta = \hbar\left(n_\theta + \tfrac{1}{2}\right) \qquad n \equiv n_r + n_\theta + n_\varphi$$

$$I_\varphi = \hbar\left(n_\varphi + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2\left(n + 3/2\right)^2}$$

Точное решение имеет вид: $E = -\dfrac{m\alpha^2}{2\hbar^2 n^2}$

2б) В квазиклассическом приближении оценить спектр уровней для частицы в постоянном однородном магнитном поле (интеграл Ландау).

$$\mathcal{H} = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} - \frac{eH_0}{2mc}p_\varphi + \frac{e^2H_0^2}{8mc^2}\rho^2 = E$$

$p_\varphi = const = M$

$p_z = const = L$

$E = const$

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi d\varphi = p_\varphi = M$$

$$I_\rho = \frac{1}{2\pi}\oint p_\rho d\rho = \frac{1}{2\pi}\oint d\rho\sqrt{2m\left(E - \frac{L^2}{2m} - \frac{M^2}{2m\rho^2} + \frac{eH_0}{2mc}M - \frac{e^2H_0^2\rho^2}{8mc^2}\right)}$$

$$I_\rho = \frac{1}{2\pi}\oint d\rho\sqrt{2mE - L^2 + \frac{eH_0}{c}M - \frac{M^2}{\rho^2} - \frac{e^2H_0^2}{4c^2}\rho^2}$$

$$I_\rho = 2\pi i\left(\mathrm{Brr}(\infty) - \mathrm{Brr}(0)\right)$$

$$\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{\underbrace{2mE - L^2 + \frac{eH_0}{c}M}_{\varepsilon} - \frac{M^2}{\rho^2} - \frac{e^2H_0^2}{4c^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\varepsilon - \frac{M^2}{\rho^2} - \frac{e^2H_0^2}{4c^2}\rho^2} =\right.$$

$$\overset{?}{=} \frac{i}{2\pi}\sqrt{|\varepsilon|}\sqrt{1 - \frac{M^2}{\rho^2} - \frac{e^2H_0^2}{4c^2}\rho^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{|\varepsilon|}\left(1 - \frac{M^2}{\rho^2} - \left(\frac{eH_0}{2c}\right)^2\rho^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8}\left(\frac{M^2}{\rho^2} + \left(\frac{eH_0}{2c}\right)^2\rho^2\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{M^2}{\rho^2} + \left(\frac{eH_0}{2c}\right)^2\rho^2\right) - \dots\right) =$$

$$\left. = \frac{\sqrt{|\varepsilon|}}{2\pi}\sqrt{-\frac{M^2}{\rho^2}}\cdot\sqrt{1 + O(z)} = \frac{i}{2\pi}\frac{M}{\rho}\sqrt{|\varepsilon|}\right]$$

$$\mathrm{Brr}(\infty) = \rho\sqrt{\frac{2mE - L^2 + \frac{eH_0}{2c}M}{\rho^2} - \left(\frac{eH_0}{2c}\right)^2 - \frac{M^2}{\rho^4}} =$$

$$= \frac{eH_0}{2c}\rho\sqrt{\frac{\varepsilon}{\left(\frac{eH_0}{2c}\rho\right)^2} - 1 - \frac{M^2}{\rho^4\left(\frac{eH_0}{2c}\rho\right)^2}} =$$

$$= i\frac{eH_0}{2c}\rho\left(1 - \frac{0{,}5\,\varepsilon}{\left(\frac{eH_0}{2c}\rho\right)^2} + \frac{0{,}5M^2}{\rho^4\left(\frac{eH_0}{2c}\rho\right)^2}\right) = -i\frac{\varepsilon}{2}\frac{2c}{eH_0}\frac{1}{2\pi}$$

$$\mathrm{Brr}(0) = \frac{i}{2\pi}\frac{M}{\rho}\sqrt{1 + \left(\frac{eH_0}{2c}\rho^2\right)^2 - \varepsilon\rho^2} =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\frac{M}{\rho}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{eH_0}{2c}\rho^2\right)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\rho^2 + \dots\right)$$

$\Rightarrow \cancel{I_\rho = 2\pi i \cdot \frac{i}{2\pi} \left(\frac{c}{eH_0} \left(2mE - L + \frac{eH_0}{c} M\right) - M\right) = (L - 2mE)\frac{c}{eH_0}}$

$$I_\rho = \frac{2mc}{eH_0}\left(E - \frac{L^2}{2m} + \frac{eH_0}{2mc} M\right) + p_\varphi$$

$$\Rightarrow I_\varphi + I_\rho = \hbar(n_\varphi + n_\rho + 1) = \frac{2mc}{eH_0} E - \frac{cL^2}{eH_0} + 3M$$

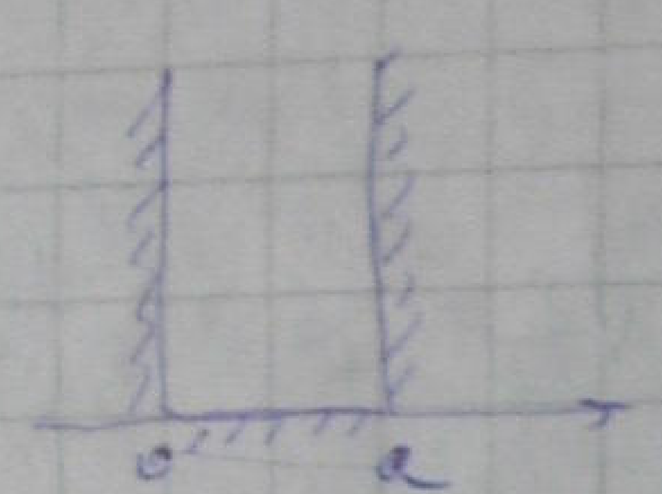
$$M = \hbar\left(n_\varphi + \frac{1}{2}\right)$$

$$E = \frac{eH_0}{2mc}\left(\hbar(n+1) + \frac{cL^2}{eH_0} - 3M\right) = \frac{eH_0}{2mc}\hbar(n+1) + \frac{L^2}{2m} - \frac{3eH_0}{2mc}\hbar\left(n_\varphi + \frac{1}{2}\right)$$

• $\psi_{неч} = C_1 \sin kx \qquad , k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{\pi n}{2a}$

$\psi_{чет} = C_2 \cos kx$

или:



$$\psi = A \sin \frac{\pi n}{a} x$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\psi(p) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} p x}\, dx =$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^a \left(e^{i\frac{\pi n}{a}x} - e^{-i\frac{\pi n}{a}x}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}px}\, dx = \frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{(i\frac{\pi n}{a} - \frac{i}{\hbar}p)x}\Big|_0^a}{i\frac{\pi n}{a} - \frac{i}{\hbar}p} + \frac{e^{-(i\frac{\pi n}{a} + \frac{i}{\hbar}p)x}\Big|_0^a}{i\frac{\pi n}{a} + \frac{i}{\hbar}p}\right] \cdot \frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{i\pi n - \frac{i}{\hbar}pa} - 1}{i\frac{\pi n}{a} - \frac{i}{\hbar}p} + \frac{e^{-i\pi n - \frac{i}{\hbar}pa} - 1}{i\frac{\pi n}{a} + \frac{i}{\hbar}p}\right] \cdot \frac{A}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$\psi(p) = \frac{Aa\hbar^2\pi n}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{\left[e^{-\frac{i}{\hbar}pa}\cdot(-1)^n - 1\right]}{p^2a^2 - \pi^2 n^2 \hbar^2}$$

$$L_n^\alpha(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}\, F(-n, 1+\alpha, x)$$

$$u = \sum_{k=0}^{n} a_k \xi^k$$

$$\sum_{k=0}^{n} \{ k(k+1)\alpha_{k+1} + 2\mu\sqrt{\lambda}(k+1)\alpha_{k+1} + (k+1)\alpha_{k+1} - 2\mu k \alpha_k -$$
$$- \mu\alpha_k - 2\mu^2\sqrt{\lambda}\alpha_k + 2\mu^2\alpha_k \}\, \xi^{k+1} = 0$$

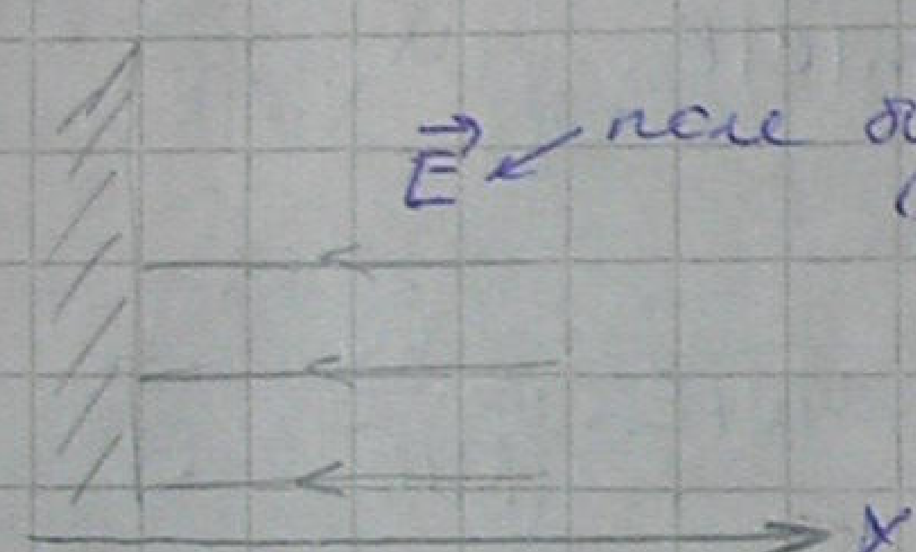
Ряд обрывается при $n + \frac{1}{2} + \mu\sqrt{\lambda} - \mu = 0$ $(\alpha_{k+1} = 0)$

$\Rightarrow$ уровни энергии

$$\frac{a}{\hbar}\sqrt{2mU_0}\left(1 - \sqrt{\frac{|E|}{U_0}}\right) = n + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow E_n = -\left(\sqrt{U_0} - \frac{\hbar}{\sqrt{2ma^2}}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)^2$$

•



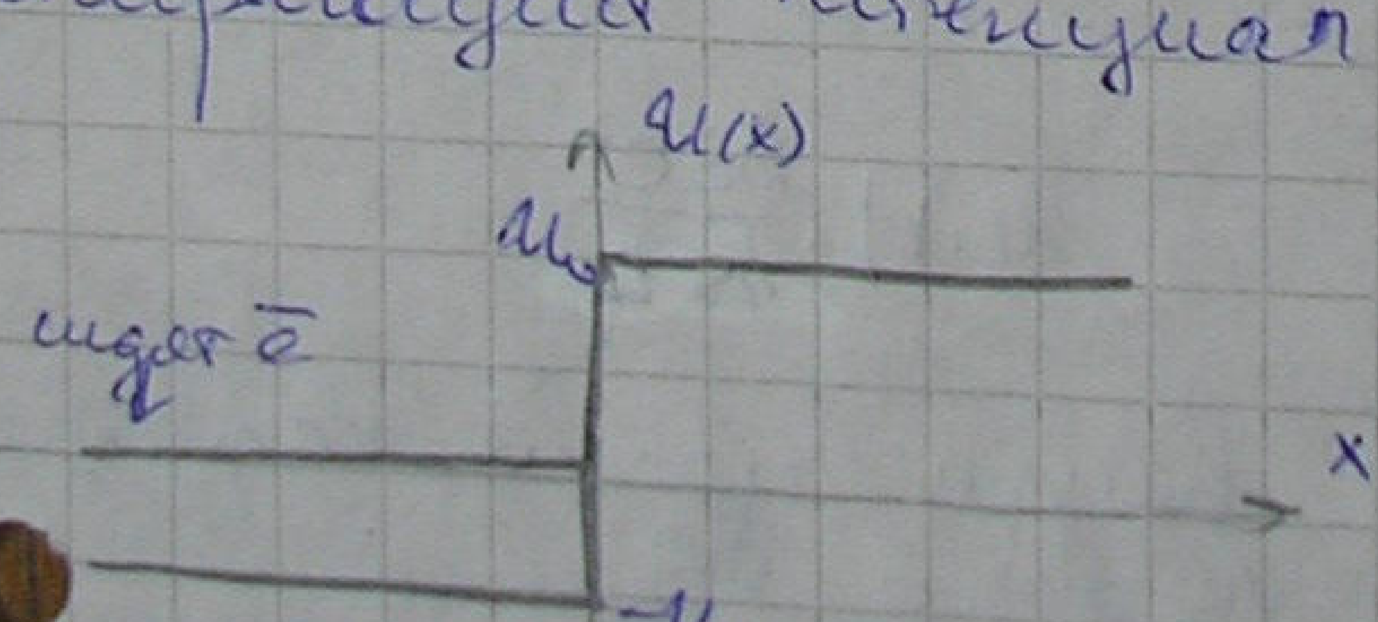
$\vec{E}$ ← поле будет вырывать $\bar{e}$ из куска материала

$$\vec{E} = -\vec{e}_x E_0$$

В квазиклассическом приближении оценить зависимость эмиссионного тока от приложенного поля

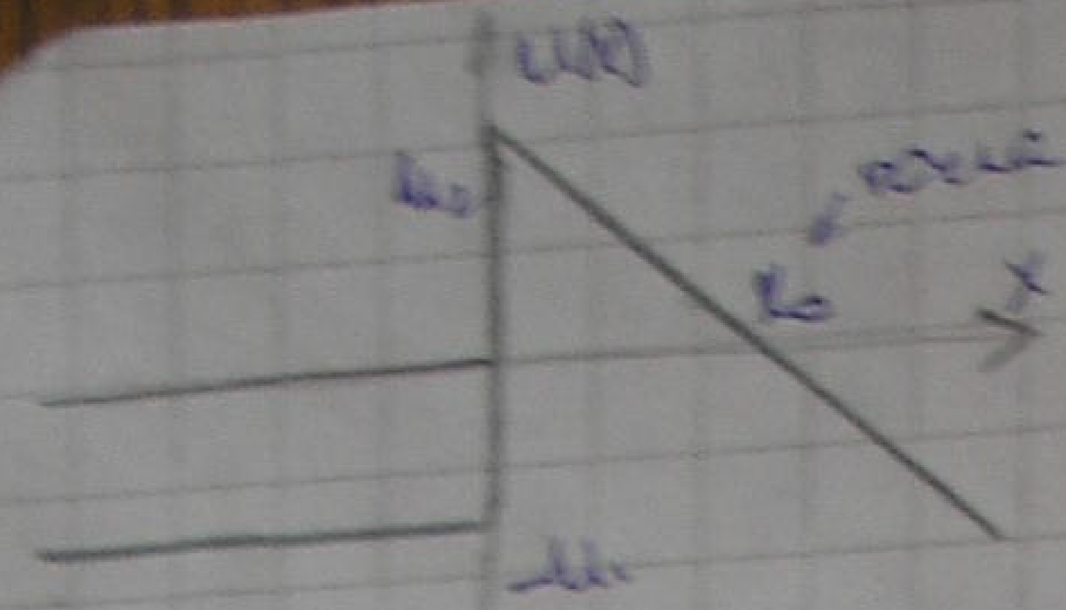
$U(x) = eE_0 x$, $e < 0$, $\varphi = Ex$

запирающий потенциал в металле:



$U(x) = -|e|E_0 x$ – добавляем при приложении поля

$\Downarrow$



По сути = D – коэффициенту прохождения через барьер

$$D = \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}|p|\,dx\right)$$

$$\frac{p^2}{2m} + U(x) = E = 0$$

$$p = \sqrt{-2mU(x)} \qquad |p| = \sqrt{2m|U(x)|}$$

$$U(x) = U_2 - |e|E_0x$$

$$\int_0^{x_0}|p|\,dx = \int_0^{x_0}dx\sqrt{2m(U_2-|e|E_0x)} = \sqrt{2m|e|E_0}\int_0^{x_0}dx\sqrt{\frac{U_2}{|e|E_0}-x} =$$

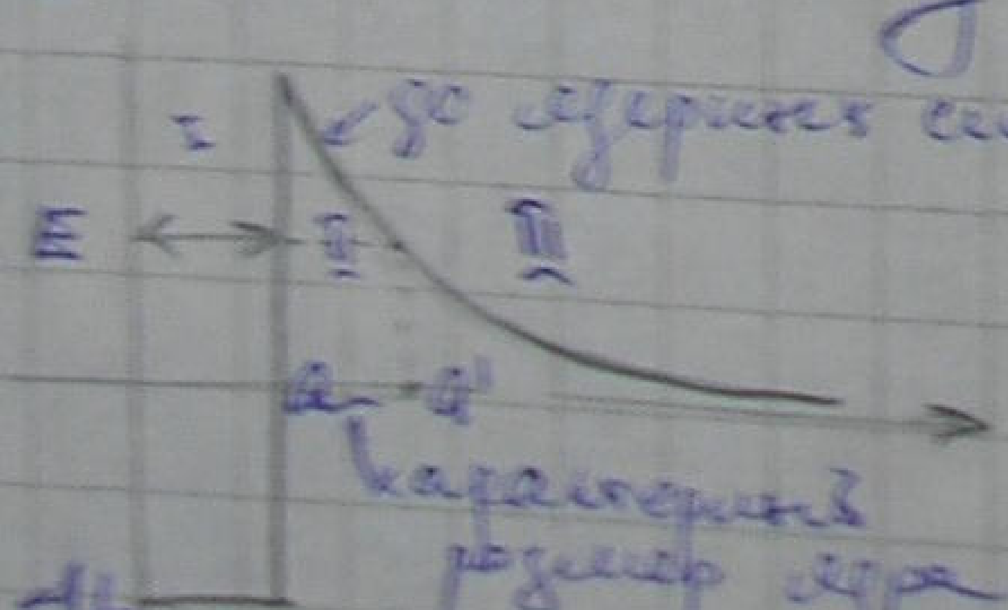
$$= -\sqrt{2m|e|E_0}\cdot\left(\frac{U_2}{|e|E_0}-x\right)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Bigg|_0^{x_0} = 0 + \sqrt{2m|e|E_0}\cdot\left(\frac{U_2}{|e|E_0}\right)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}$$

$$j \sim D = \exp\left\{-\frac{4}{3\hbar}\sqrt{2m|e|E_0}\left(\frac{U_2}{|e|E_0}\right)^{3/2}\right\} = \exp\left\{-\frac{4\sqrt{2m}\,U_2^{3/2}}{3\hbar|e|E_0}\right\}$$

1) α-распад: $N = N_0\cdot e^{-t/t_0}$

Оценить величину t_0

Z ядро   α-частица $Z_\alpha = 2$



$$U(r) = \frac{2Ze^2}{r}$$

внутри ядра α-частица свободна

коэффициент прохождения под барьером = ?

dN – число распавшихся за dt частиц: $dN = N_0 e^{-t/t_0}\cdot\left(-\frac{dt}{t_0}\right)$

$dN = -N \frac{dt}{t_0}$ Д/з

$dN = N \cdot D \cdot dt$ число столкновений в единицу времени

с другой стороны

$n = \frac{v}{2a}$

$\frac{mv^2}{2} - U_0 = E$

$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E+U_0)}$

$n = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2}{m}(E+U_0)}$

$\Rightarrow t_0 = \frac{1}{nD}$ ← Д/з

2) а) Выразить операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ для гармонического осциллятора через $\hat{x}$ и $\hat{p}$

б) Найти аналоги a и a^+ в классической механике.

в) записать $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ в гейзенберговском представлении.

$$D = \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int_a^{a'} \sqrt{2m(U(r)-E)}\,dr\right\}$$

$$\int_a^{a'} \left(\frac{\overset{k}{2Ze^2}}{r} - E\right)^{1/2} dr = \int_a^{a'} \Big(\underbrace{\frac{k}{r} - E}_{t}\Big)^{1/2} dr = \Big\{ \frac{k}{r} - E = t,$$

$$dt = -\frac{k\,dr}{r^2}, \quad r = \frac{k}{t+E}\Big\} = -\int \frac{k^2}{(t+E)^2}\cdot\frac{1}{k}\sqrt{t}\,dt =$$

$$= -k\int \frac{\sqrt{t}}{(t+E)^2}\,dt = k\int \sqrt{t}\, d\left(\frac{1}{(t+E)}\right) = k\left(\frac{\sqrt{t}}{t+E} - \right.$$

$$\left. - \int \frac{1}{(\sqrt{t})^2 + E}\, d(\sqrt{t})\right) = k\left(\frac{\sqrt{t}}{t+E}\Big|_{\frac{k}{a}-E}^{0} - \frac{1}{\sqrt{E}}\cdot \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{t}{E}}\Big|_{\frac{k}{a}-E}^{0}\right) =$$

17

$$= 0 - k\frac{\sqrt{\frac{k}{a}-E}}{k/a} + \frac{k}{\sqrt{E}}\cdot \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k}{aE}-1} = \frac{k \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k}{aE}-1}}{\sqrt{E}} - a\sqrt{\frac{k}{a}-E}$$

$$D = \exp\left[\left\{\frac{2Ze^2}{\sqrt{E}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2Ze^2}{aE}-1} - a\sqrt{\frac{2Ze^2}{a}-E}\right\}\cdot\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m}\right)\right]$$

$$t_0 = \frac{1}{nD}, \quad n = \frac{\sqrt{\frac{2}{m}(E+U_0)}}{2a}$$

№2) б) $\hat{a}_{\text{гейз}} = e^{i\omega(\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2})t}\,\hat{a}\,e^{-i\omega(\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2})t} =$

$= \hat{a} + [i\omega(\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2})t, \hat{a}] + \frac{1}{2!}[i\omega(\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2}), [i\omega(\hat{a}^+\hat{a}+\frac{1}{2})t,$

$\hat{a}]] = \{1 = [\hat{a}^+, \hat{a}], \; [\hat{a}, \hat{a}] = 0\} - \{[AB, C] = A[B,C] + [A,C]B\} =$

$= \hat{a} + i\omega t\hat{a} - \frac{1}{2!}\omega^2 t^2\hat{a} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(+i\omega t)^n\hat{a}\frac{1}{n!} =$

$= \hat{a}\cdot e^{i\omega t}$

$\hat{a}^+_{\text{гейз}} = \hat{a}^+ - i\omega t\hat{a}^+ + \ldots = \hat{a}^+ e^{-i\omega t}$

Классические аналоги:

$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\,x - \frac{ip}{\sqrt{m\omega}}\right)$

$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\,x + \frac{ip}{\sqrt{m\omega}}\right)$

$aa^+ = \frac{1}{2\hbar}\left(m\omega x^2 + \frac{p^2}{m\omega}\right) \Rightarrow H = \hbar\omega aa^+$

(в отличие от квантовой теории, где
$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2})$.)
получилось из того, что $\hat{p}$ и $\hat{x}$ не коммутировали.

$x = x_0\cos\omega t$ $\quad p = -m\omega x_0\sin\omega t$ — з-ны движения

$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\cdot x_0\cos\omega t + i\sqrt{m\omega}\cdot x_0\sin\omega t\right) = \frac{\sqrt{m\omega}\,x_0}{\sqrt{2\hbar}}\cdot e^{i\omega t} =$

$= a(0)\,e^{i\omega t}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{i}{\hbar}px} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{1}{2}\left(x-\frac{i}{\hbar}p x_0\right)^2 - \frac{p^2 x_0^2}{2\hbar^2}\right) =$$

$$= \sqrt{2\pi}\, e^{-p^2 x_0^2/2\hbar^2} \quad \left\{p_0 = \frac{\hbar}{x_0},\ \xi = \frac{p}{p_0}\right\}$$

$$\Rightarrow \psi_n(p) = \frac{1}{\sqrt{n!\, 2^n \sqrt{\pi}\, p_0}} \cdot (i)^n \cdot \left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)^n \cdot e^{-\xi^2/2} =$$

$$= i^n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \cdot \frac{1}{\sqrt{n!\, 2^n p_0 \sqrt{\pi}}}$$

2-й способ:

производящая ф-ция полиномов Эрмита:

$$e^{2zt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) \frac{t^n}{n!}$$

$\sum_n \psi_n(x) \frac{t^n}{n!} c_n$ — дальше вычисляем Фурье-образ ф-ции e^{2zt-t^2}.

• $$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \int_0^\infty dr\, R_{nl}^2 \frac{r^2}{r} = C_{nl}^2 \int_0^\infty r\,dr\, e^{-2\sqrt{2\varepsilon}\rho} \rho^{2l} \left(L_{n-l-1}^{2l+1}(2\sqrt{2\varepsilon}\rho)\right)^2 =$$

$$= \left\{\rho = \frac{r}{a}\right\} = C_{nl}^2 a^2 (2\sqrt{2\varepsilon})^{-2l-2} \int_0^\infty z^{2l+1} e^{-z} \left(L_{n-l-1}^{2l+1}(z)\right)^2 dz =$$

$$= C_{nl}^2 \cdot a^2 (2\sqrt{2\varepsilon})^{-2l-2} \cdot I$$

$$I = \int_0^\infty z^{2l+1} e^{-z} L_{n-l-1}^{2l+1} e^{z} \cdot z^{-(2l+1)} \frac{d^{n-l-1}}{dz^{n-l-1}}\left(z^{n+l} e^{-z}\right) dz =$$

$$L_n^p = e^z z^{-p} \frac{d^n}{dz^n}\left(z^{n+p} e^{-z}\right) = (-1)^n z^n + (-1)^{n-1}(n+p)\, n\, z^{n-1} + O(z^{n-2})$$

$$= \int dz\, (-1)^{n-l-1} \frac{d^{n-l-1}}{dz^{n-l-1}} \left[(-1)^{n-l-1} z^{n-l-1} + \ldots\right] z^{n+l} e^{-z} =$$

$$= (n+l)!\,(n-l-1)!$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = a^2 \frac{n^3}{2^{2l} \cdot 4} \frac{4}{(n+l)!\,(n-l-1)!\, a^3 n} \frac{2^{2l}}{n^2 a^2} (n+l)!\,(n-l-1)! = \boxed{\frac{1}{n^2 a}}$$

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \int_0^\infty R_{nl}^2\, dr = C_{nl}^2 \int_0^\infty dr\, e^{-2\sqrt{2\varepsilon}\rho} \rho^{2l} \left(L_{n-l-1}^{2l+1}(2\sqrt{2\varepsilon}\rho)\right)^2 =$$

Записать УШ а) в декартовых координатах в калибровке $A_x = -H_0 y$ ($\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$) $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$ определен с точностью до градиента (выбор конкретного χ - калибровка) и найти энергетический спектр и волновые ф-ции

б) в цилиндрических координатах в калибровке $A_x = -\frac{1}{2} H_0 y$, $A_y = \frac{1}{2} H_0 x$
и найти энергетический спектр

1) $x = \rho \cos\varphi$
$y = \rho \sin\varphi$

$\vec{e}_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$
$\vec{e}_\varphi = (-\rho \sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0) \cdot \frac{1}{\rho} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$\nabla^2 = \left(\vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{\rho}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_\rho\right)}_{\vec{e}_\varphi}\frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} =$$
$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- $R_{nl}(r) \sim e^{-z/2} z^l L^{2l+1}_{n-l-1}(z)$

$$0 = \int_0^\infty dr\, r^2 R_{n_1 l}(r) R_{n_2 l}(r), \text{ если } n_1 \neq n_2$$

$$\int_0^\infty dz\, z^2 z^{2l} e^{-z} L^{2l+1}_{n_1-l-1}(z) L^{2l+1}_{n_2-l-1}(z) \sim e^{z} z^{-2l-1} \frac{d^{n-l-1}}{dz^{n-l-1}}\left(e^{-z} z^{n+l}\right)$$

но на самом деле $z \sim \frac{r}{n}$

=> правильно писать $\int_0^\infty dz\, \frac{z}{z} z^{2l} L^{2l+1}_{n_1-l-1}(z_1) L^{2l+1}_{n_2-l-1}(\frac{z}{z}) e^{-\frac{z_1+z_2}{2}}$

- в цилиндрических координатах в калибровке.

$A_x = -\frac{1}{2}H_0 y \qquad A_y = \frac{1}{2}H_0 x$

$$L = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{eH_0}{2c}\rho^2\dot\varphi$$

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} - \frac{eH_0}{2mc}p_\varphi + \frac{e^2H_0^2}{8mc^2}\rho^2$$

$$\omega = \frac{eH_0}{mc}$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) - \frac{i\hbar\omega}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{m\omega^2\rho^2}{8}$$

$$[\hat{H}, \hat{p}_\varphi] = [\hat{H}, \hat{p}_z] = 0$$

=> можно искать в виде: $\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\mu\varphi} e^{\frac{i}{\hbar}p_z z} R(\rho)$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(R'' + \frac{1}{\rho}R' - \frac{\mu^2}{\rho^2}R\right) + \left(E - \frac{p_z^2}{2m} - \frac{m\omega^2\rho^2}{8} - \frac{\hbar\omega}{2}m\right)R = 0$$

$$\xi = \frac{m\omega}{2\hbar}\rho^2 \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial\rho} = R'_\xi \frac{m\omega}{\hbar}\rho \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial\rho^2} = R'_\xi\frac{m\omega}{\hbar} + R''_{\xi\xi}\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\rho^2$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(2\xi\frac{m\omega}{\hbar}R''_{\xi\xi} + \frac{2m\omega}{\hbar}R'_\xi - \mu^2\frac{m\omega}{2\hbar\xi}R\right) +$$

$$+\left(E - \frac{p_z^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{8}\cdot\frac{2\xi\hbar}{m\omega} - \frac{\hbar\omega m}{2}\right)R = 0$$

$$\Rightarrow \xi R''_{\xi\xi} + R'_\xi + R\left(-\frac{\mu^2}{4\xi} + \underbrace{\frac{1}{\hbar\omega}\left(E - \frac{p_z^2}{2m}\right)}_{\beta} - \frac{\mu}{2} - \frac{\xi}{4}\right) = 0$$

из асимптотик:

$$R(\xi) = e^{-\xi/2}\cdot\xi^{|\mu|/2}w(\xi)$$

$$R'_\xi(\xi) = -\frac{1}{2}e^{-\xi/2}\xi^{|\mu|/2}w(\xi) + \frac{|\mu|}{2}e^{-\xi/2}\xi^{\frac{|\mu|}{2}-1}w(\xi) + e^{-\xi/2}\xi^{\frac{|\mu|}{2}}w'(\xi)$$

$$R''_{\xi\xi}(\xi) = \frac{1}{4}e^{-\xi/2}\xi^{|\mu|/2}w - \frac{|\mu|}{4}e^{-\xi/2}\xi^{\frac{|\mu|}{2}-1}w - \frac{1}{2}e^{-\xi/2}\xi^{\frac{|\mu|}{2}}w' -$$

$$- \frac{|\mu|}{4}e^{-\frac{\xi}{2}}\xi^{\frac{|\mu|}{2}-1}w + \frac{|\mu|}{2}\left(\frac{|\mu|}{2}-1\right)e^{-\frac{\xi}{2}}\xi^{\frac{|\mu|}{2}-2}w + \frac{|\mu|}{2}e^{-\xi/2}\xi^{\frac{|\mu|}{2}-1}w' -$$

$$- \frac{1}{2}e^{-\xi/2}\xi^{\frac{|\mu|}{2}}w' + \frac{|\mu|}{2}e^{-\xi/2}\xi^{\frac{|\mu|}{2}-1}w' + e^{-\xi/2}\xi^{|\mu|/2}w''$$

$$\xi w'' + w'(|\mu| - \xi + 1) + w\left(\beta - \frac{|\mu|+1}{2}\right) = 0$$

$$w = F\left(-\left(\beta - \frac{|\mu|+1}{2}\right), |\mu|+1, \xi\right)$$

$\beta - \frac{|\mu|+1}{2} \geqslant n_0$

$E = \hbar\omega\left(n_0 + \frac{|\mu|+\mu+1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m}.$

Калибровочные преобразования.

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\hat{\vec p} - \frac{e}{c}\vec A\right)^2 + e\varphi\right]\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

некоторая const

$\vec A \to \vec A - \nabla\alpha$ $\qquad \psi \to e^{i\alpha\cdot a}\cdot\psi$ $\qquad \alpha = \alpha(t,x)$

$\varphi \to \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t}$

Одновременно все 3 преобразования

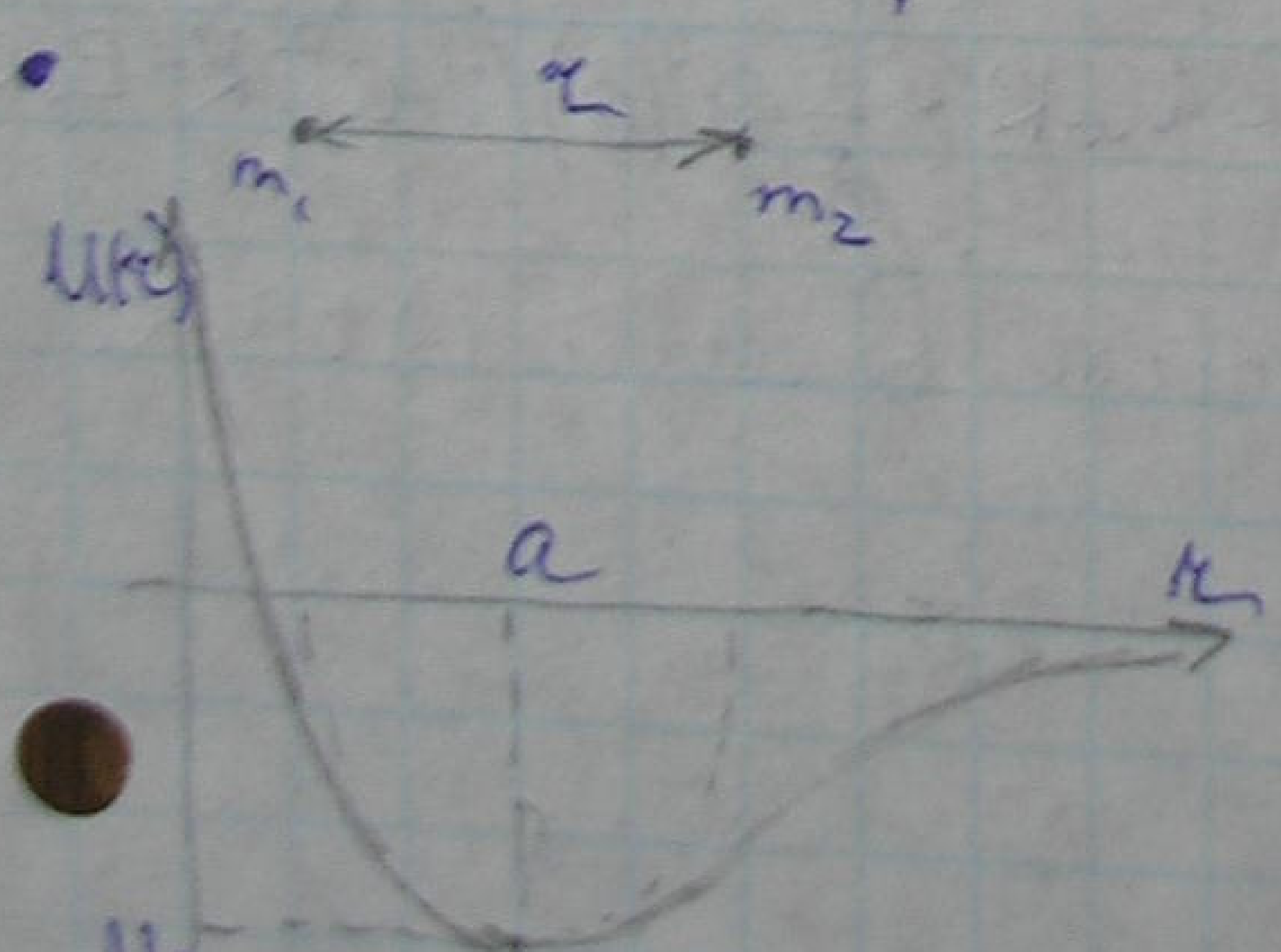
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{i\alpha a}\psi\right) = e^{i\alpha a}\left(i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} - \hbar\frac{\partial\alpha}{\partial t}a\psi\right)$$

$$\hat{\vec p}\left(e^{i\alpha a}\psi\right) = \frac{\hbar}{i}e^{i\alpha a}\left(\vec\nabla\psi + ia\vec\nabla\alpha\psi\right)$$

$$\Rightarrow i\hbar\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \cancel{i\frac{\partial\alpha}{\partial t}a\psi}\right) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec\nabla + \cancel{\hbar a\vec\nabla\alpha} - \frac{e}{c}\vec A + \cancel{\frac{e}{c}\vec\nabla\alpha}\right)^2\psi + e\left(\varphi + \cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\right)\psi.$$

Возьмём $a = -\frac{e}{\hbar c}$

$\Rightarrow$ если в УШ одновременно сделать такие преобразования, то УШ не изменится $\to$ это калибровочные преобразования.



двухатомная молекула, взаимодействующая с центральным потенциалом

Будем рассматривать малые колебания около положения равновесия.

В задаче двух тел надо заменить:

⇒ спин начинает крутиться вокруг поля с циклотронной частотой.

$\vec{H} = \vec{e}_z H_0 \cos \omega t$

Д/З
при $t=0$ спин направлен вдоль оси x
найти $\langle s_i \rangle$ в зависимости от времени

$$\langle s_x \rangle = (\chi_1^* \ \chi_2^*)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

Теория возмущений

• гармонический осциллятор

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}}_{\hat{H}_0} + \underbrace{\alpha x^4}_{\hat{V}}$$

найти поправки к уровням энергии

$$\Delta E_n = \langle n | \hat{V} | n \rangle$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi}\right)$$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)$$

$$\xi = \frac{x}{x_0}, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

?

$$\sqrt{n+1}\, | n+1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \hat{a}^+ | n \rangle$$

$$\sqrt{n-1}\, | n-1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{a} | n \rangle$$

$$[\hat{a}\, \hat{a}^+] = 1$$

$$\langle m | n \rangle = \delta_{mn}$$

$$\hat{V} = \alpha x^4 = \alpha x_0^4 \xi^4 = \alpha x_0^4 \cdot \frac{1}{4} (\hat{a} + \hat{a}^+)^4$$

$$\Delta E_n = \frac{\alpha x_0^4}{4} \langle n | (\hat{a} + \hat{a}^+)^4 | n \rangle$$

$\Delta E_n = \frac{\alpha x_0^4}{4} \langle n | (\hat{a}^2 \hat{a}^{+2} + \hat{a}^{+2} \hat{a}^2 + \hat{a} \hat{a}^{+2} \hat{a} + \hat{a}^+ \hat{a}^2 \hat{a}^+ +$

$+ \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ + \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a}) | n \rangle.$

можно отбросить все слагаемые, в которых степени $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ отличаются, т.к. в результате их действие получаются ортогональные величины

$\hat{a}^+ \hat{a} | n \rangle = \hat{a}^+ \sqrt{n} | n-1 \rangle = n | n \rangle$

$\hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} = n^2 : \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} | n \rangle = \hat{a}^+ \hat{a}\, n | n \rangle =$

$= n \hat{a}^+ \hat{a} | n \rangle = n^2 | n \rangle$

$\hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ = (n+1)^2 : \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ | n \rangle = (n+1) \hat{a} \hat{a}^+ | n \rangle =$

$= (n+1)^2 | n \rangle$

$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{a} \hat{a}^+ - \hat{a}^+ \hat{a} = 1 \Rightarrow \hat{a} \hat{a}^+ = 1 + \hat{a}^+ \hat{a}$

$\Rightarrow \hat{a} \hat{a}^+ | n \rangle = (n+1) | n \rangle$

$\hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} \hat{a}^+ | n \rangle = \hat{a}^+ \hat{a} (n+1) | n \rangle = n(n+1)$

$\hat{a} \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} | n \rangle = n(n+1)$

$\hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} | n \rangle = n(n-1) = \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \sqrt{n}\, n-1 \rangle =$

$= \sqrt{n}(n-1) \hat{a}^+ | n-1 \rangle = n(n-1) | n \rangle$

$\hat{a}^2 \hat{a}^{+2} = (n+1)(n+2) = \sqrt{n+1}\, \hat{a}^2 \hat{a}^+ | n+1 \rangle =$

$= (n+2) \sqrt{n+1}\, \hat{a} | n+1 \rangle = (n+2)(n+1) | n \rangle$

$\Rightarrow \Delta E_n = \frac{\alpha x_0^4}{4} (6n^2 + n(-1+3+2+2) + 3) = \frac{\alpha x_0^4}{4} (6n^2 + 6n + 3)$

- $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$

У осциллятора был заряд e.
Очень быстро включили электрическое поле E_0, направленное вдоль оси x.
Изначально осциллятор был в основном состоянии.
Какова вероятность перейти в возбужденное?

$\psi_n (E_0 = 0)$ $\quad |n\rangle$

$\tilde{\psi}_n (E_0)$ $\quad |\tilde{n}\rangle$

проще считать вероятность того, что останется в основном

$$P_{возб} = 1 - P_{основное} = 1 - |\langle 0|\tilde{0}\rangle|^2$$

переход в основное состояние системы с полем.

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} e^{-\xi^2/2} = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2x_0^2}$$

для $|\tilde{0}\rangle$ надо решить ур-ние Шредингера с электрическим полем:

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - eE_0 x = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(x - \frac{eE_0}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{e^2E_0^2}{2m\omega^2}$$

$$\xi = \frac{x}{x_0} \qquad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\Rightarrow |\tilde{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2x_0}\left(x - \frac{eE_0}{m\omega^2}\right)^2\right)$$

$$\langle 0|\tilde{0}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2x_0^2}\left[x^2 + \left(x - \frac{eE_0}{m\omega^2}\right)^2\right]\right\} =$$

$$2x^2 - \frac{2eE_0}{m\omega^2}x + \frac{e^2E_0^2}{(m\omega^2)^2} = 2\left(x^2 - \frac{eE_0}{m\omega^2}x + \frac{e^2E_0^2}{2(m\omega^2)^2}\right) =$$

$$= 2\left(x^2 - 2\cdot\frac{eE_0}{2m\omega^2}x + \left(\frac{eE_0}{2m\omega^2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{eE_0}{m\omega^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{eE_0}{m\omega^2}\right)^2\right) =$$

$$= 2\left(x - \frac{eE_0}{2m\omega^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{eE_0}{m\omega^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\left(\frac{x}{x_0}\right)\cdot \exp\left\{-\frac{1}{x_0^2}\cdot\left(x - \frac{eE_0}{2m\omega^2}\right)^2 - \frac{1}{4x_0^2}\left(\frac{eE_0}{m\omega^2}\right)^2\right\} =$$

$$= e^{-\left(\frac{eE_0}{2x_0 m\omega^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow P_{возб} = 1 - e^{-\left(\frac{eE_0}{2x_0 m\omega^2}\right)^2} = 1 - e^{-\left(\frac{eE_0}{2}\right)^2\cdot\frac{m\omega^3}{\hbar}}$$

Д/З ① Атом с зарядом ядра Z, у него один электрон. Происходит α-распад:

$$Z \to Z-2 + \alpha\text{-частица}$$

Определить вероятность возбуждения атома при α-распаде, если изначально он был в основном состоянии.

② $$\vec{H}(t) = H_0\left(\vec{e}_z + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2\omega^2t^2}\left(\cos\omega t\cdot\vec{e}_x - \sin\omega t\cdot\vec{e}_y\right)\right)$$

при $t\to-\infty$ спин направлен против поля.

В низшем порядке теории возмущений найти вероятность переворота спина.

(рассматривать взаимодействие магнитного момента с магнитным полем в виде теории возмущений) (б) $P_{возб} = 1 - P_{\substack{\text{остаться в} \\ \text{том же сост.}}} = 1 - |\langle 0|\tilde{0}\rangle|^2$, где

$\psi_n(E_0 = 0) \to |0\rangle$, $\tilde{\psi}_n(E_0) \to |\tilde{0}\rangle$

$|0\rangle = C'_{nl}\, Y_{lm}(\theta,\varphi) \cdot e^{-z/2} z^l L^{2l+1}_{n-l-1}(z)$, где

$$C'_{nl} = \sqrt{\frac{4}{n(n+l)!\,(n-l-1)!}}\left(\frac{Z}{na}\right)^{3/2},$$

$a = \frac{\hbar}{me^2}$, $2\varepsilon = \frac{Z^2}{n^2}$, $z = 2\sqrt{2\varepsilon}\,\frac{r}{a}$.

$Z \to Z - 2$: $\qquad |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{Z}{a}\right)^{3/2} e^{-Z\frac{r}{a}}$

$$\langle 0|\tilde{0}\rangle = \int_0^\infty r^2 dr \frac{\overset{\text{из } \int \text{ по углам}}{\cancel{4\pi}/\cancel{\pi}}}{n(n+l)!\,(n-l-1)!}\left(\frac{Z(Z-2)}{n^2a^2}\right)^{3/2} \cdot \left(2\frac{Z}{n}\frac{r}{a}\right)^{2l}$$

$$\cdot\, e^{-\frac{Z}{n}\frac{r}{a} - \frac{(Z-2)}{n}\frac{r}{a}} \cdot L^{2l+1}_{n-l-1}\left(2\frac{Z}{n}\frac{r}{a}\right) L^{2l+1}_{n-l-1}\left(2\frac{Z-2}{n}\frac{r}{a}\right) =$$

$$= \int_0^\infty r^2 dr \frac{4}{n(n+l)!\,(n-l-1)!}\left(\frac{Z(Z-2)}{n^2a^2}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{2r}{na}(Z-1)} \cdot$$

$$\cdot\, L^{2l+1}_{n-l-1}\left(2\frac{Zr}{na}\right) L^{2l+1}_{n-l-1}\left(2\frac{Z-2}{n}\frac{r}{a}\right) \cdot \left(2\frac{Z}{n}\frac{r}{a}\right)^{2l}$$

Основное состояние: $n = 1$, $l = 0$.

$$\langle 0|\tilde{0}\rangle = 4\left(\frac{Z(Z-2)}{a^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty dr\, r^2 e^{-\frac{2r}{a}(Z-1)} \cancel{e^{Z}} \cdot \cancel{Z^{-1}} \cdot \cancel{Z}\, \cancel{e^{-Z}} =$$

$$= 4\left(\frac{Z(Z-2)}{a^2}\right)^{3/2} \frac{a}{2(1-Z)}\left[\underbrace{r^2 e^{-\frac{2r}{a}(Z-1)}\Big|_0^\infty}_{0} + \frac{a}{Z-1}\left[\underbrace{r e^{-\frac{2r}{a}(Z-1)}\Big|_0^\infty}_{0} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{a}{2(Z-1)} e^{-\frac{2r}{a}(Z-1)}\Big|_0^\infty\right]\right] = \left(\frac{Z(Z-2)}{a^2}\right)^{3/2} \frac{a^3}{(Z-1)^3} =$$

$$= \left(\frac{Z(Z-2)}{(Z-1)^2}\right)^{3/2} = \left(1 - \frac{1}{(Z-1)^2}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow P_{возб} = 1 - \left(1 - \frac{1}{(Z-1)^2}\right)^3$$

при $Z \gg 1$ $\qquad P_{возб} \approx \frac{3}{(Z-1)^2}$

(2) $\vec{H} = H_0\left(\vec{e}_z + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2\omega^2 t^2}(\cos\omega t\,\vec{e}_x - \sin\omega t\,\vec{e}_y)\right)$

$$\vec{H}_{\text{bozu}} = \left(\frac{\varepsilon \cdot \cos\omega t}{1+\varepsilon^2\omega^2 t^2} ;\ - \frac{\varepsilon \sin\omega t}{1+\varepsilon^2\omega^2 t^2} ;\ 1 \right) \cdot H_0$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{H}\vec{\sigma} = H_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2\omega^2 t^2} e^{i\omega t} \\ \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2\omega^2 t^2} \cdot e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{n\to m} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^{t} dt'\, V_{mn}\, e^{i\omega_{mn}(t'-t_0)} \right|^2$$

ω^0

$$\hat{H} = H_0 + V(t) = H_0 - \frac{e\hbar}{2mc}(\vec{H}\vec{\sigma})$$

$$H_0 \cdot (0\ \ 1) \begin{pmatrix} 0 & \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2\omega^2 t^2} e^{i\omega t} \\ \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2\omega^2 t^2} \cdot e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= H_0 \cdot (0\ \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2\omega^2 t^2} e^{-i\omega t} \end{pmatrix} = H_0 \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2\omega^2 t^2} \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} P_{n\to m} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^{t} dt'\, H_0 \cdot \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2\omega^2 t'^2} e^{-i\omega t'} \cdot e^{i\omega_{mn}(t'-t_0)} \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^{t} dt'\, H_0 \cdot e^{-i\omega_{mn} t_0} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2\omega^2 t'^2} e^{it'(\omega_{mn}-\omega)} \right|^2 =$$

$$= \frac{H_0^2}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^{t} dt' \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2\omega^2 t'^2} e^{it'(\omega_{mn}-\omega)} \right|^2 = \frac{H_0^2}{\hbar^2 \varepsilon^2 \omega^4} \cdot$$

$$\cdot \left| \int_{t_0}^{t} dt' \cdot \frac{1}{(t' - \frac{i}{\omega\varepsilon})(t' + \frac{i}{\omega\varepsilon})} \cdot e^{it'(\omega_{mn}-\omega)} \right|^2 = [\omega_{mn} = 0] =$$

$$= \frac{\mu_0^2}{\hbar^2 \varepsilon^2 \omega^4} \cdot \left[2\pi i \left(\cancel{\mathrm{Res}(\infty)}_{0} - \mathrm{Res}\left(\frac{i}{\varepsilon\omega}\right) - \cancel{\mathrm{Res}\left(-\frac{i}{\varepsilon\omega}\right)}_{0} \right) \right]^2$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{i}{\varepsilon\omega}\right) = -\frac{1}{\frac{2i}{\omega\varepsilon}} \cdot e^{i \cdot i\omega \cdot \frac{1}{\omega\varepsilon}} = -\frac{\omega\varepsilon}{2i} \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{i\omega\varepsilon}{2} e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$P_{n\to m} = \omega_0^2 \cdot \frac{\mu_0^2}{\hbar^2 \varepsilon^2 \omega^4} \left(2\pi i \cdot \frac{i\omega\varepsilon}{2} \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right)^2 =$$

$$= \frac{e^2 H_0^2}{4m^2c^2} \cdot \frac{\mu_0^2}{\hbar^2 \varepsilon^2 \omega^4} \cdot \pi^2 \cdot \cancel{\omega^2} \varepsilon^2 \cdot e^{-\frac{2}{\varepsilon}} =$$

$$= \boxed{\frac{\pi^2 e^2}{4m^2c^2\omega^2} \cdot \mu_0^2 \cdot e^{-\frac{2}{\varepsilon}}}$$

51 $\langle 0 | \tilde{0} \rangle = 4 \int_0^\infty r^2 dr \cdot \left(\frac{Z(Z-2)}{a^2} \right)^{3/2} e^{-2\frac{r}{a}(Z-1)} =$

$$= \left[x = \frac{2r}{a}(Z-1) \right] = 4 \int_0^\infty e^{-x} x^2 dx \cdot \left(\frac{Z(Z-2)}{a^2} \right)^{3/2} \cdot \frac{a^3}{8} \cdot (Z-1)^{-3} =$$

$$= \left(\frac{Z(Z-2)}{(Z-1)^2} \right)^{3/2} \to P = 1 - \left(\frac{Z(Z-2)}{(Z-1)^2} \right)^3$$

52 ур-ние Паули

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \left[\frac{(p - \frac{e}{c}A)^2}{2m} + e\varphi - \frac{\hbar e}{2mc} (\vec{\sigma}, \vec{H}) \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \psi(\vec{r}, t) \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} + \frac{e\hbar}{2mc} (\vec{\sigma}, \vec{H}) \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = 0$$

спин, направленный $\parallel$ магнитному полю ($H_0 \vec{e}_z$) в постоянном магнитном поле не будет вращаться.

$$= \frac{e^2 H_0^2 \hbar^2}{4m^2c^2}\left(\frac{2\pi i}{\hbar\omega}\cdot\frac{e^{-(\omega+\omega_0)\frac{1}{\varepsilon\omega}}}{2i}\right)^2 = \frac{\pi^2}{\omega^2 4}\frac{e^2H_0^2}{m^2c^2}\cdot e^{-\frac{2(\omega+\omega_0)}{\varepsilon\omega}} =$$

$$\omega_0^2$$

$$= \left(\frac{\pi\omega_0}{2\omega}\cdot e^{-\frac{(\omega+\omega_0)}{\varepsilon\omega}}\right)^2$$

• задача

найти релятивистские поправки к уровням атома водорода

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(r)$$

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}} - U(r)$$

$$\to H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^2} + U(r) = mc^2\sqrt{1+\frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}} + U(r) \simeq$$

$$\simeq mc^2\left(1+\frac{\vec{p}^2}{2m^2c^2} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}\right)^2 + \dots\right) + U(r)$$

$$\left[(1+x)^{1/2}\right]' = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$

$$\left[(1+x)^{1/2}\right]'' = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$$

$$\hat{V} = \frac{\vec{p}^4}{8c^2m^3} = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m}\right)^2\cdot\frac{1}{2mc^2} = \frac{\left(\hat{H}_0 + \frac{Ze^2}{r}\right)^2}{2mc^2}$$

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{r}$$

$$\hat{H}_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$$

$$\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle = \frac{1}{a_0}\cdot\frac{Z}{n^2}, \quad \left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle = \frac{Z^2}{a_0^2n^3(l+1/2)}$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \sim 5{,}3\cdot10^{-9}\text{ см}, \quad E_n = -E_0\cdot\varepsilon_n = -\frac{e^2}{a_0}\cdot\varepsilon_n =$$

$$= -\frac{e^2}{a}\cdot\frac{Z^2}{2n^2} = -\frac{e^4m}{\hbar^2}\frac{Z^2}{2n^2}$$

$$\Delta E = \langle n|\hat{V}|n\rangle = \frac{1}{2mc^2}\langle n|\hat{H}_0^2 + \hat{H}_0\frac{Ze^2}{r} + \frac{Ze^2}{r}\hat{H}_0 + \frac{Z^2e^4}{r^2}|n\rangle =$$

$$= \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{Z^4e^4}{a_0^2n^3(l+1/2)} - 2\frac{Z^2e^2}{a_0n^2}|E_n| + |E_n|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{e^4 Z^4}{4a_0^2 n^4} - \frac{Z^4 e^4}{a_0^2 n^4} + \frac{Z^4 e^4}{a_0^2 n^3 (l+1/2)}\right) =$$

$$= \frac{e^4 Z^4}{2mc^2 a_0^2 n^3}\left(-\frac{3}{4n} + \frac{1}{l+1/2}\right)$$

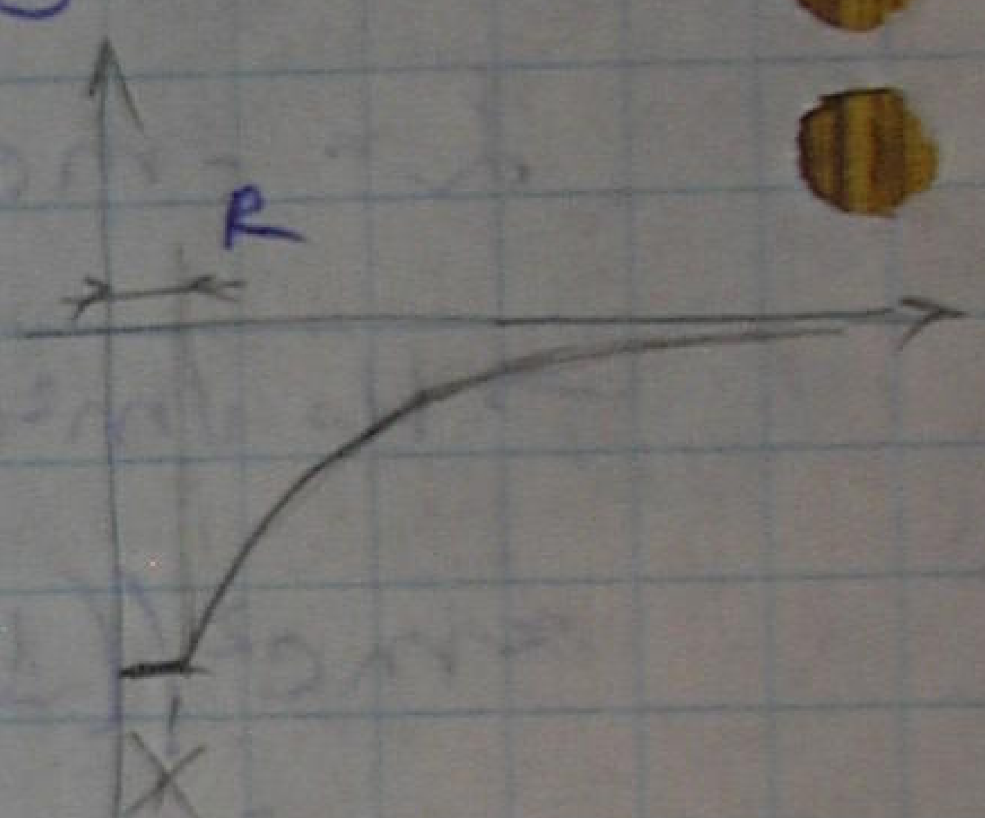
$$\frac{e^8 Z^4 m^2}{2mc^2\hbar^4 n^3}$$

$$\frac{e^4 m}{\hbar^2}\frac{Z^2}{2n^2}\cdot\frac{e^4}{\hbar^2 c^2}\frac{Z^2}{n} = \frac{e^8 Z^4 m}{2c^2\hbar^2 n^3}$$

$$\Delta E = -|E_n|\alpha^2 \cdot \frac{Z^2}{n}\left(-\frac{3}{4n} + \frac{1}{l+1/2}\right), \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

Д/з ① Вычислить поправки к энергиям водородоподобного атома, связанные с неточечностью ядра.

потенциал будет не просто $\frac{\alpha}{r}$, а:



заряд распределен равномерно по объему ядра.

разность реального потенциала и $\frac{\alpha}{r}$ — возмущение

② Найти расщепление вырожденного (кратность вырождения n^2) уровня $n=2$ в атоме H за счет электрического и магнитного полей

$\vec{H} = H_0\vec{e}_z$ $\quad\vec{E} = E_0\vec{e}_x$ (спина нет)

(см. [illegible])

③ поправка к энергии гармонического осциллятора, если возмущение:

$V = \alpha x^3$

(первая поправка будет $= 0$ $\rightarrow$ нужно считать 2-ую поправку).

(23) $\Delta E_2 = \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn} V_{nm}}{E_{0n} - E_{0m}} \hbar\omega (n-m)$ $= \sum_{n \neq m} \frac{|V_{nm}|^2}{E_{0n} - E_{0m}}$

$V_{mn} = \langle m | V | n \rangle \qquad V_{nm} = \langle n | V | m \rangle$

$\hat{V} = \alpha x^3 = \alpha x_0^3 \frac{1}{2\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^+)^3$

$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \qquad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$

$\langle m | \alpha x^3 | n \rangle \qquad \xi = \frac{x}{x_0} \qquad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \hat{a}^+ |n\rangle \qquad |n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{a} |n\rangle$

$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$

$(\hat{a} + \hat{a}^+)^3 = \hat{a}^3 + (\hat{a}^2 \hat{a}^+ + \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a}^+ \hat{a}^2) +$
$+ (\hat{a}^{+2} \hat{a} + \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ + \hat{a} \hat{a}^{+2}) + \hat{a}^{+3}$

$\langle m | n \rangle = \delta_{mn}$

$\langle m | \hat{a}^3 | n \rangle = \langle m | \hat{a}^2 \sqrt{n} | n-1 \rangle = \langle m | \hat{a} \sqrt{n(n-1)} | n-2 \rangle =$
$= \langle m | \sqrt{n(n-1)(n-2)} | n-3 \rangle = \sqrt{n(n-1)(n-2)}\, \delta_{m,n-3}$

$\langle m | \hat{a}^2 \hat{a}^+ | n \rangle = \langle m | \hat{a}(n+1) | n \rangle = \langle m | (n+1)\sqrt{n} | n-1 \rangle =$
$= \sqrt{n}(n+1)\, \delta_{m,n-1}$

$\langle m | \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} | n \rangle = \langle m | \hat{a}\, n | n \rangle = \langle m | n\sqrt{n} | n-1 \rangle = \sqrt{n} \cdot n\, \delta_{m,n-1}$

$\langle m | \hat{a}^+ \hat{a}^2 | n \rangle = \langle m | \hat{a}^+ \hat{a} \sqrt{n} | n-1 \rangle = \langle m | \sqrt{n}(n-1) | n \rangle =$
$= \sqrt{n}(n-1)\, \delta_{m,n-1}$

$$\langle m|\hat{a}^{+2}\hat{a}|n\rangle = \langle m|\hat{a}^{+}n|n\rangle = \langle m|\sqrt{n+1}\,n|n+1\rangle =$$

$$= n\sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1}$$

$$\langle m|\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{a}^{+}|n\rangle = \langle m|\hat{a}^{+}(n+1)|n\rangle = \langle m|\sqrt{n+1}(n+1)|n+1\rangle =$$

$$= \sqrt{n+1}(n+1)\,\delta_{m,n+1}$$

$$\langle m|\hat{a}\hat{a}^{+2}|n\rangle = \langle m|\hat{a}\hat{a}^{+}\sqrt{n+1}|n+1\rangle = \langle m|\sqrt{n+1}(n+2)|n+1\rangle =$$

$$= \sqrt{n+1}(n+2)\,\delta_{m,n+1}$$

$$\langle m|\hat{a}^{+3}|n\rangle = \langle m|\sqrt{n+1}\,\hat{a}^{+2}|n+1\rangle = \langle m|\sqrt{(n+1)(n+2)}\,\hat{a}^{+}|n+2\rangle =$$

$$= \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\,\delta_{m,n+3}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{\hbar\omega(n-n+3)} + \frac{(n(n+1)+n+n-1)^2}{\hbar\omega(n-n+1)} + \frac{(n+1)(n+n+1+n+2)}{\hbar\omega(n-n-1)} +$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{\hbar\omega(n-n-3)} =$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega}\left[\frac{(n^2-n)(n-2)}{3} + n(3n)^2 - \frac{9(n+1)^3}{1} - \frac{(n^2+2+3n)(n+3)}{3}\right]$$

$$(n^2-n)(n-2) = n^3 - n^2 + 2n - 2n^2 = n^3 - 3n^2 + 2n$$

$$n(3n)^2 = 9n^3$$

$$9(n+1)^3 = 9(n+1)(n^2+2n+1) = 9(n^3+2n^2+n+n^2+2n+1) =$$

$$= 9n^3 + 27n^2 + 27n + 9$$

$$(n^2+2+3n)(n+3) = n^3 + 2n + 3n^2 + 3n^2 + 6 + 9n = n^3 + 6n^2 + 11n + 6$$

$$\cancel{n^3} - 3n^2 + 2n + 3(\cancel{9n^3} - \cancel{9n^3} - 27n^2 - 27n - 9) - \cancel{n^3} - 6n^2 - 11n - 6 =$$

$= -90n^2 - 90n - 33$

$\to -\dfrac{30n^2+30n+11}{\hbar\omega}$

$$\Delta E = \frac{\alpha^2}{8}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^3 \cdot \left(-\frac{30n^2+30n+11}{\hbar\omega}\right) =$$

$$= -\frac{\alpha^2\hbar^2}{m^3\omega^4}\,\frac{30n^2+30n+11}{8}$$

(52)

$$\det\|V_{ij} - \Delta E\,\delta_{ij}\| = 0$$

i, j пробегают по вырождению =

	1	2	3	4
m	0	−1	0	1
l	0	1	1	1

$\hat V = -\dfrac{eH_0}{2mc}\hat p_\varphi - eE_x \cdot r\cos\varphi\sin\theta$ → в симметричной калибровке

$\hat p_\varphi = \hat L_z = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$, $\hat p_\varphi|nlm\rangle = \hbar m|nlm\rangle$

$$V_{ij} = \langle 2lm|\hat V|2l'm'\rangle = -\frac{eH_0}{2mc}\langle 2lm|\hat p_\varphi|2l'm'\rangle -$$

$$- eE_x\langle 2lm|r\cos\varphi\sin\theta|2l'm'\rangle =$$

$$= -\frac{eH_0}{2mc}\hbar m\,\delta^m_{m'}\delta^l_{l'} - eE_x\langle 2lm|r\cos\varphi\sin\theta|2l'm'\rangle$$

l' / m' → ; $l\,m$ ↓	$l'=0$, $m'=0$	$l'=1$, $m'=-1$	$l'=1$, $m'=0$	$l'=1$, $m'=1$
0 0	0 ($\Delta m=0$)		0 ($\Delta m=0$)	
1 −1		$\frac{eH\hbar}{2mc}$		0 ($\Delta m=2$)
1 0	($\Delta m=0$) 0		0 ($\Delta l=0$)	
1 −1		0 ($\Delta m=2$)		$-\frac{eH\hbar}{2mc}$

для 2-ого слагаемого матричный элемент $\neq 0$, если m и m' (*)

отличаются на 1.

вклад магнитного поля будет $\neq 0$ на диагонали.

$<n\, l'\, m'|\hat{p}_\varphi|\, n\, l\, m> = \hbar m <n\, l'\, m'|\, n\, l\, m> =$ $\neq 0$, когда все квантовые числа совпадают

$= \hbar m\, \delta_m^{m'} \delta_l^{l'}$

при $m = 0$ и вся эта вещь $= 0 \Rightarrow$ 1 из 3 эл-тов на диагонали $= 0$.

$$<n\, l'\, m'|r\cos\varphi \sin\theta|\, n\, l\, m> = \int_0^\infty dr\, r^2 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot$$

$$\psi^*_{nl'm'} \psi_{nlm} \cdot r\cos\varphi \sin\theta =$$

при взятии $\int d\varphi$: $\quad (Y_{lm}(\theta,\varphi) \sim P_l^m(\cos\theta) \cdot e^{im\varphi}$

$$= \int_0^\infty dr\, r^2 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, R_{nl} R^*_{nl}\, Y^*_{l'm'} Y_{lm}\, r\cos\varphi \sin\theta \sim$$

$$\sim \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi\, e^{im\varphi} \cdot e^{-im'\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})\, e^{im\varphi} e^{-im'\varphi} =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{in\varphi} = 0, \text{ если } n \neq 0$$

$$= \pi (\delta_{m+1,m'} + \delta_{m-1,m'})$$

$\Rightarrow$ вывод $(*)$

Д/з 1) доделать Б2

2) найти $d\sigma$ в первом борновском приближении:

а) $U(r) = U_0 \frac{a^2}{r^2}$ б) $U(r) = U_0 e^{-r/a}$

(посчитать Фурье-образ в сферических координатах а) $U(r) = U_0 \frac{a^2}{r^2}$

б) $U(r) = U_0 e^{-r/a}$

$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 |U(\vec{q})|^2 d\Omega =$

$= \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \left| \int d^3r \, U(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} \right|^2 d\Omega =$

$= \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \left| \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, U(r) e^{iqr\cos\theta} \right|^2 d\Omega =$

$= \{ x = \cos\theta \} = \{ 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \, U(r) \int_{-1}^{1} e^{iqrx} dx =$

$= 2\pi \int_0^\infty U(r) r^2 \frac{1}{iqr} (e^{iqr} - e^{-iqr}) dr =$

$= \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r dr \, U(r) \sin qr \} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \cdot \left| \frac{4\pi}{q} \cdot \int_0^\infty r dr \cdot \right.$

$\left. \cdot U(r) \sin qr \right|^2 d\Omega$

$\frac{\pi}{2q}$

а) $\frac{4\pi}{q} \cdot \int_0^\infty r^2 dr \, U_0 \frac{a^2}{r^2} \sin qr = 4\pi a^2 U_0 \int_0^\infty \frac{\sin qr}{qr} dr =$

$= \frac{2\pi^2 a^2 U_0}{q}$, $q = \frac{1}{\hbar} 2p \sin\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow d\sigma = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2\pi^2 a^2 U_0}{q}\right)^2 d\Omega = \left(\frac{m\pi a^2 U_0}{q\hbar^2}\right)^2 d\Omega$

б) $\frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r dr U_0 e^{-r/a} \sin qr = 2\pi \int r dr U_0 \cdot e^{-r/a} \cdot$

$\cdot \frac{1}{iq} (e^{iqr} - e^{-iqr}) = \frac{2\pi}{iq} U_0 \left[\int_0^\infty r e^{(iq - \frac{1}{a})r} dr - \right.$

$\left. - \int_0^\infty r e^{-(iq + \frac{1}{a})r} dr \right] = \frac{2\pi U_0}{iq} \left[\frac{1}{iq - \frac{1}{a}} \cdot \left(\overset{0}{r e^{(iq - \frac{1}{a})r} \Big|_0^\infty} - \right. \right.$

$- \frac{1}{iq - 1/a} \cdot e^{(iq - \frac{1}{a})r} \Big|_0^\infty \Big) + \frac{1}{iq + 1/a} \cdot \Big(\overset{0}{r e^{-(iq + \frac{1}{a})r} \Big|_0^\infty} +$

$$+ \frac{1}{iq+1/a} e^{-(iq+1/a)z} \Big|_0^\infty \Big) \Big] = \frac{2\pi U_0}{iq} \Big[\frac{1}{(iq-1/a)^2} - \frac{1}{(iq+1/a)^2} \Big] =$$

$$= \frac{2\pi U_0}{iq} \cdot \Big[\frac{-q^2 + \frac{2iq}{a} + 1/a^2 + q^2 + \frac{2iq}{a} - 1/a^2}{(q^2 + \frac{1}{a^2})^2} \Big] =$$

$$= \frac{2\pi U_0}{iq} \cdot \frac{4iq\,a^3}{(q^2a^2+1)^2} = \frac{8\pi U_0 a^3}{(q^2a^2+1)^2}$$

$$\rightarrow d\sigma = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{8\pi U_0 a^3}{(q^2a^2+1)^2}\right)^2 d\Omega = \left(\frac{4mU_0a^3}{\hbar^2(q^2a^2+1)^2}\right)^2 d\Omega$$

$\Rightarrow \sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \delta_0^2 = \frac{4\pi}{k^2} (ak)^2 \left[\frac{tg(\varkappa a)}{\varkappa a} - 1 \right]^2 = 4\pi a^2 \left[\frac{tg\, \varkappa a}{\varkappa a} - 1 \right]^2$

(Д/з) 1) найти σ медленных частиц для

$U(r) = U_0 \cdot \delta(r-a)$

2) найти время жизни 2p-состояния атома водорода.

Вероятность спонтанного излучения в единицу телесного угла за единицу времени

$dw = \frac{\omega^3}{2\pi \hbar c^3} |\vec{d}_{mn}|^2 \sin^2\theta \, d\Omega$

$\int d\Omega \sin^2\theta = \int\limits^{2\pi} d\varphi \int\limits^{1} dx (1-x^2) = 2\pi \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}$

$\Rightarrow$ не интересует, куда излучено.

$w = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\vec{d}_{mn}|^2$ - вероятность излучения в единицу времени

$\tau = \frac{1}{w}$ - время жизни

$\Delta E = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar w$

$\Rightarrow$ надо найти $|\vec{d}_{mn}|^2$

предположим что в исходном состоянии $m=0$

пренебрегаем тонким расщеплением

$2p_{m=0} \to 1s$

$\langle 2, l=1, m=0 | (r \sin\theta \cos\varphi;\ r \sin\theta \sin\varphi;\ r\cos\theta) | 1, l=0, m=0 \rangle$

$\langle l', m' | \cos\theta | l, m \rangle = \delta_{l', l+1} \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

доделать

+ оценить численно τ и ΔE.

$L_n^\beta(z) = e^z \cdot z^{-\beta} \dfrac{d^n}{dz^n}\left(z^{n+\beta} e^{-z}\right)$

$R = e^{-\sqrt{2\varepsilon}\rho} \rho^{\ell} \cdot L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(2\sqrt{2\varepsilon}\rho)$

$R_{2,1,0} = e^{-\sqrt{2\varepsilon}\rho} \rho \cdot L_0^3(2\sqrt{2\varepsilon}\rho) = e^{-\sqrt{2\varepsilon}\rho} \cdot \rho \cdot \cancel{e^{2\sqrt{2\varepsilon}\rho} \cdot (2\sqrt{2\varepsilon}\rho)^{-3} \cdot (2\sqrt{2\varepsilon}\rho)^{3} \cdot e^{-2\sqrt{2\varepsilon}\rho}}$

$R_{1,0,0} = e^{-\sqrt{2\varepsilon}\rho} \cdot L_0^1(2\sqrt{2\varepsilon}\rho) = e^{-\sqrt{2\varepsilon'}\rho}$

$\rho = \dfrac{r}{a}$, $a = \dfrac{\hbar}{\alpha m c}$, $\sqrt{2\varepsilon} = \dfrac{Z_1}{n_1} = \dfrac{Z_1}{2}$, $\sqrt{2\varepsilon'} = \dfrac{Z_1}{n_2} = Z_1$

$\langle 2,1,0 | r | 1,0,0 \rangle = \int\limits_0^\infty dr\, r^2 \cdot r \cdot e^{-\frac{r}{2a}} \cdot \dfrac{r}{a} \cdot e^{-\frac{r}{a}} =$

$= \dfrac{1}{a}\int\limits_0^\infty dr \cdot r^4 \cdot e^{-\frac{3r}{2a}} = \dfrac{1}{a} \cdot \left(\dfrac{2a}{3}\right)^5 \int\limits_0^\infty dt\, t^4 \cdot e^{-t} = \dfrac{4! \cdot 2^5 a^4}{3^5} =$

$= \dfrac{2^3 3\, 2^5 a^4}{3^5} = \dfrac{2^8 a^4}{3^4} = \left(\dfrac{4a}{3}\right)^4$

$\psi_{210} = \dfrac{1}{\sqrt{24}} \cdot \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}} \cdot r \cdot e^{-r/2a} \cdot \dfrac{1}{a^{5/2}} \cdot \cos\theta$

$\psi_{100} = \dfrac{e^{-r/a}}{\sqrt{\pi}\, a^{3/2}}$

$\omega = \dfrac{E_1 - E_2}{\hbar} = \dfrac{Ry}{2\hbar}\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{3Ry}{8\hbar}$, $Ry = \dfrac{e^2}{a}$

$w = \left(\dfrac{2}{3}\right)^8 \cdot \dfrac{a^2 e^2}{\hbar^4 c^3} \cdot \dfrac{e^6}{a^3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\dfrac{e^2}{\hbar c}\right)^4 \cdot \dfrac{c}{a} \approx \left(\dfrac{1}{137} \cdot \dfrac{4}{9}\right)^4 \cdot \dfrac{3 \cdot 10^{10}\, см/с}{5{,}3 \cdot 10^{-9}\, см} =$

$\approx \left(\dfrac{1}{300}\right)^4 \cdot \dfrac{3}{5} \cdot 10^{19} \approx \dfrac{1}{10^{10}} \cdot 0{,}6 \cdot 10^{19} \approx 6 \cdot 10^8\, c^{-1}$

$\tau = \dfrac{1}{w} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9}\, c$

если $\hbar = c = 1$, то $[t] = \left[\dfrac{\hbar}{E}\right] = \left[\dfrac{\hbar}{mc^2}\right] = m^{-1}$

все величины имеют размерность массы.

Угловая часть: $\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}} \cdot e^{i\varphi} \sin\theta$

3) $H_x = H_0 \sin \omega t$ $\quad H_y = H_0 \cos \omega t$ $\quad H_z = H_1$

при $t=0$ $\quad S_z = \frac{1}{2}$

вероятность переворота спина

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi - \frac{e\hbar \vec{H}}{2mc}\vec{\sigma}\right]\psi$$

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} = \tilde{\psi}(\vec{r}) \cdot \begin{pmatrix}\chi_1(t)\\ \chi_2(t)\end{pmatrix}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix} = -\frac{e\hbar}{2mc}(\vec{H}\vec{\sigma})\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{H}\vec{\sigma} = H_0 \sin \omega t \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + H_0 \cos \omega t \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + H_1 \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}H_1 & (-i)H_0 e^{i\omega t}\\ H_0 i e^{-i\omega t} & -H_1\end{pmatrix}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix} = -\frac{e}{2mc}\begin{pmatrix}H_1 & -iH_0 e^{i\omega t}\\ iH_0 e^{-i\omega t} & -H_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}$$

$$\tilde{\chi}_1 = \chi_1 e^{i\omega t} \qquad \chi_2 = \tilde{\chi}_2 e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial t} = e^{-i\omega t}\left(\frac{\partial \tilde{\chi}_2}{\partial t} - i\omega \tilde{\chi}_2\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} i\begin{pmatrix}\chi_1\\ \tilde{\chi}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}H_1 & -iH_0\\ iH_0 & -H_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \tilde{\chi}_2\end{pmatrix}\left(-\frac{e}{2mc}\right) + \begin{pmatrix}0\\ \omega\tilde{\chi}_2\end{pmatrix}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \tilde{\chi}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{eH_1}{2mc} & i\frac{eH_0}{2mc}\\ -\frac{ieH_0}{2mc} & \frac{eH_1}{2mc} - \omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_1\\ \tilde{\chi}_2\end{pmatrix}$$

$$\omega_1 = \frac{eH_1}{mc} \qquad \omega_0 = \frac{eH_0}{mc}$$

$$\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1\\ A_2\end{pmatrix} e^{i\lambda t}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\omega_1}{2}+\lambda & \frac{i\omega_0}{2} \\ -\frac{i\omega_0}{2} & \frac{\omega_1}{2}-\omega+\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}=0$$

$$0=\det=\left(-\frac{\omega_1}{2}+\lambda\right)\left(\frac{\omega_1}{2}-\omega+\lambda\right)-\frac{\omega_0^2}{4}=$$

$$=\lambda^2+\lambda\left(-\omega-\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_1}{2}\right)-\frac{1}{4}\omega_1^2+\frac{\omega\omega_1}{2}-\frac{\omega_0^2}{4}$$

$$D=b^2-4ac=\omega^2-4\left(-\frac{1}{4}\omega_1^2+\frac{\omega\omega_1}{2}-\frac{\omega_0^2}{4}\right)=$$

$$=\omega^2+\omega_1^2-2\omega_1\omega+\omega_0^2=(\omega-\omega_1)^2+\omega_0^2$$

$$\lambda_\pm=\frac{1}{2}\left(\omega\pm\sqrt{(\omega-\omega_1)^2+\omega_0^2}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2}\omega_1+\lambda\right)A_1=-\frac{i}{2}\omega_0 A_2$$ (из системы только одно уравнение остается, т.к. $\det=0$)

$$A_1=1 \Rightarrow A_2=\frac{2i}{\omega_0}\left(-\frac{1}{2}\omega_1+\lambda\right)$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{a}_1\\ \tilde{a}_2\end{pmatrix}=c_+ e^{i\lambda_+ t}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{\omega_0}(-i\omega_1+2i\lambda_+)\end{pmatrix}+c_- e^{i\lambda_- t}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{\omega_0}(-i\omega_1+2i\lambda_-)\end{pmatrix}$$

По начальным условиям:

$$\tilde{a}_1(0)=1 \qquad \tilde{a}_2(0)=0=\tilde{a}_2(0)$$

$$\begin{cases} c_+ + c_- = 1 \\ \frac{c_+}{\omega_0}(-i\omega_1+2i\lambda_+)+\frac{c_-}{\omega_0}(-i\omega_1+2i\lambda_-)=0 \end{cases}$$

$$\lambda_\pm=\frac{\omega}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\omega-\omega_1)^2+\omega_0^2}$$

$$\underbrace{(c_+ + c_-)}_{=1}\left(-\frac{i\omega_1}{\omega_0}+\frac{i\omega}{\omega_0}\right)+(c_+ - c_-)\,\frac{i\sqrt{(\omega-\omega_1)^2+\omega_0^2}}{\omega_0}=0$$

$$c_+ - c_- = \frac{\omega_1-\omega}{\sqrt{(\omega-\omega_1)^2+\omega_0^2}}$$

$$c_+ = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\omega_1 - \omega}{\sqrt{(\omega-\omega_1)^2+\omega_0^2}}\right)$$

$$c_- = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega_1 - \omega}{\sqrt{(\omega-\omega_1)^2+\omega_0^2}}\right)$$

$$P(s=-1/2) = |\chi_2|^2 = |\tilde{\chi}_2|^2 = \left| c_+ e^{i\lambda_+ t} \frac{1}{\omega_0}(-\omega_1 + 2\lambda_+) + c_- e^{i\lambda_- t} \frac{1}{\omega_0}(-\omega_1 + 2\lambda_-)\right|^2$$

вероятность переворота спина

в $\lambda_\pm$ убираем $\frac{\omega}{2}$, т.к. $e^{i\frac{\omega}{2}t}$ выносится отовсюду,
$|e^{i\frac{\omega}{2}t}| = 1$.

$$P(s=-1/2) = \Big| c_+ e^{i\sqrt{(\omega-\omega_1)^2+\omega_0^2}\,\frac{t}{2}} \frac{1}{\omega_0}(-\omega_1 + \omega + \sqrt{\ldots}) +$$

$$+ c_- \frac{1}{\omega_0} e^{-i\sqrt{\ldots}\,\frac{t}{2}} (-\omega_1 + \omega - \sqrt{\ldots}) \Big|^2 =$$

$$= \Big| \frac{(-\omega_1+\omega)}{\omega_0}\Big(\underbrace{(c_+ + c_-)}_{=1} \cancel{\cos\sqrt{\ldots}\,\frac{t}{2}} + i\underbrace{(c_+ - c_-)}_{=\frac{\omega_1-\omega}{\sqrt{\ldots}}} \sin\sqrt{\ldots}\,\frac{t}{2}\Big) +$$

$$+ \sqrt{\ldots}\,\frac{1}{\omega_0}\Big(\overbrace{(c_+ + c_-)}^{} i \sin\sqrt{\ldots}\,\frac{t}{2} + \overbrace{(c_+ - c_-)}^{} \cdot \cancel{\cos\sqrt{\ldots}\,\frac{t}{2}}\Big)\Big|^2 =$$

$$= \frac{1}{\omega_0^2} \sin^2\left(\sqrt{(\omega-\omega_1)^2+\omega_0^2}\,\frac{t}{2}\right) \cdot \left| \frac{-(\omega_1-\omega)^2 + (\omega-\omega_1)^2 + \omega_0^2}{(\omega-\omega_1)^2+\omega_0^2}\right|^2 =$$

$$= \frac{\omega_0^2}{(\omega-\omega_1)^2+\omega_0^2} \sin^2\left(\sqrt{(\omega-\omega_1)^2+\omega_0^2}\,\frac{t}{2}\right)$$

- $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ имеют разную энергию
(даже ур-ние Дирака дает одинаковую энергию
— зависимость от n, j E_{nj})

$\frac{\Delta_{2S_{1/2}}}{2P_{1/2}} \to 1057$ МГц — лэмбовский сдвиг (следствие вторичного квантования)

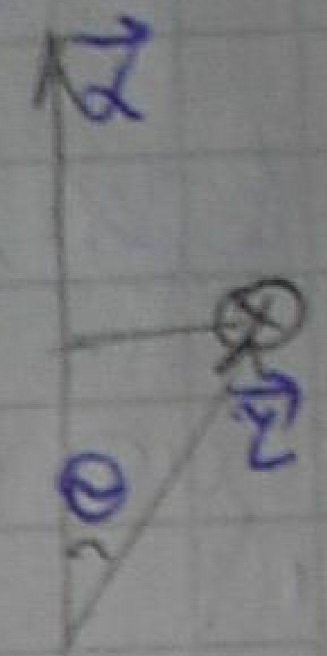
$\Rightarrow \psi \to \exp\left(\frac{1}{4}\gamma^{\mu\nu}\alpha_{\mu\nu}\right)\psi = \exp\left(\frac{1}{4}\gamma^{ij}\alpha_{ij}\right)\psi = \exp\left(-\frac{i}{4}\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix}\alpha_{ij}\right)\psi$

поворот характеризуется углом и направлением поворота.

для вектора:

$V^0 \to V^0$

$V^i \to \exp(\alpha)^i_{\ j} V^j \approx (1+\alpha)^i_{\ j} V^j$



вообще при повороте: $\vec{V} \to \vec{V} + [\vec{\alpha}\vec{V}]$

$V_i \to V_i + \underbrace{\varepsilon_{ijk}\alpha^j V^k}$

$-\varepsilon_{ikj}\alpha^j V^k = -\varepsilon_{ijk}\alpha^k V^j$

Спинор перейдет в:

$\psi \to \exp\left(2\frac{i}{4}\alpha_k\begin{pmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix}\right)\psi \qquad (\varepsilon_{ijk}\cdot\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}).$

$\exp\left(\frac{i}{2}\alpha_k\begin{pmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix}\right) = 1 + \frac{1}{2}i\alpha_k\begin{pmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\left[\frac{i}{2}\alpha_k\begin{pmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix}\right]^2 + \ldots =$

$(\vec{\alpha}\vec{\sigma})^2 = \vec{\alpha}^2 \qquad \vec{\alpha}^2 = \alpha$

$= 1 + \frac{i}{2}\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\alpha}\vec{\sigma}\end{pmatrix} - \frac{1}{8}\vec{\alpha}^2\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix} =$

все четные степени пропорциональны единичной матрице.

$= \underbrace{1 - \frac{1}{8}\vec{\alpha}^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\vec{\alpha}}{2}\right)^4 - \ldots}_{\cos\frac{\alpha}{2}} + \underbrace{\frac{i}{2}\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\alpha}\vec{\sigma}\end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\left(\frac{i}{2}\right)^2\alpha^2\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\alpha}\vec{\sigma}\end{pmatrix} + \ldots}_{i\sin\frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix}\vec{n}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{n}\vec{\sigma}\end{pmatrix}}$

$\vec{n}$ - единичный вектор в направлении $\vec{\alpha}$

все нечетные степени $\sim (\vec{\alpha}\vec{\sigma})$

$\to \psi \to \left[\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix}\vec{n}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{n}\vec{\sigma}\end{pmatrix}\right]\psi$

при $\alpha = 2\pi$

$\psi \to (-1)\psi = -\psi$

для дираковского спинора $\psi_a \psi_b = -\psi_b \psi_a$

В группе Лоренца есть преобразования:

P - пространственная инверсия: $(t, \vec{x}) \to (t, -\vec{x})$

T - отражение времени $(t, \vec{x}) \to (-t, \vec{x})$

• убедиться, что ур-ние Дирака инвариантно, если

1) P: $\psi(t, \vec{x}) \to i\gamma^0 \psi(t, -\vec{x})$

2) T: $\psi(t, \vec{x}) \to i\gamma^1\gamma^3 \psi^*(-t, \vec{x})$ ← Д/З

1) $[i\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar}]\psi = 0$ - ур-ние Дирака

преобразуем:

$[i\gamma^\mu D'_\mu - \frac{mc}{\hbar}]\, i\gamma^0\psi = 0$

$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \to D'_\mu = (D_0, -D_i)$

γ^0 хотим вытащить вперед:

$$\gamma^\mu\gamma^0 = \begin{cases} \gamma^0\gamma^0, & \mu = 0 \\ \gamma^i\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^i, & \mu = 1,2,3 \end{cases}$$

$\Rightarrow [i\gamma^0\gamma^0 D_0 + i\gamma^0\gamma^i D_i - \frac{mc}{\hbar}]\psi = 0$

$\gamma_0 (i\gamma^0 D_0 + i\gamma^i D_i - \frac{mc}{\hbar})\psi = 0$ $\quad | \gamma^0$

$\Rightarrow [i\gamma^\mu D_\mu - \frac{mc}{\hbar}]\psi = 0$

$$\hat V_3 = -\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\cdot 4\frac{ze^2}{\hbar^2 r^3}(\vec S\vec L) = -\frac{ze^2}{2m^2c^2}\frac{1}{r^3}(\vec S\vec L) = -\overset{\alpha'}{\frac{ze^2}{2m^2c^2}}\frac{1}{r^3}\cdot\frac{\hat j^2-\hat L^2-\hat S^2}{2}$$

$$\langle j,l,s,n,m|\hat V_3|j,l,s,n,m\rangle = \frac{\alpha'}{2}\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle\left(j(j+1)-l(l+1)-\underbrace{s(s+1)}_{\frac12(\frac12+1)=\frac34}\right) =$$

$$= -\frac{ze^2\hbar^2}{4m^2c^2}\left(j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)\right)\cdot\frac{z^3}{a^3n^3(l+1)(l+1/2)l} =$$

$$= -\frac{z^4e^2\hbar^2}{a^3 4m^2c^2n^3}\cdot\frac{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)}{(l+1)(l+1/2)l} =$$

$$= -\frac{z^4e^2\hbar^2}{4m^2c^2n^3}\cdot\frac{m^3\cdot e^6}{\hbar^6}\cdot\left[\frac{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)}{(l+1)(l+1/2)l}\right] =$$

$$= -\frac{z^2}{2n^2}\frac{me^4}{\hbar^2}\cdot\frac{z^2}{2n}\cdot\frac{e^4}{c^2\hbar^2}\left[\frac{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)}{l(l+1)(l+1/2)}\right] =$$

$$= -|E|\cdot\frac{z^2}{2n}\cdot\alpha^2\cdot\left[\frac{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)}{l(l+1)(l+1/2)}\right]$$

Новый вариант для ур-ния Дирака:

$$E'\psi_{12} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec\sigma\vec\nabla)+e\varphi\right]\psi_{12} + (\vec\sigma\vec\nabla)\frac{\hbar^2}{4m^2c^2}(e\varphi+E')\cdot$$

$$\cdot(\vec\sigma\vec\nabla)\psi_{12}$$

$$E'\left(1+\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}(\vec\sigma\vec\nabla)^2\right)\psi_{шр} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec\sigma\vec\nabla)^2+e\varphi\right)\Big(1+$$

$$+\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}(\vec\sigma\vec\nabla)^2\Big)\psi_{шр} + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}(\vec\sigma\vec\nabla)(E'-e\varphi)(\vec\sigma\vec\nabla)\psi_{шр}$$

$$\left(1+\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}(\vec\sigma\vec\nabla)^2\right)\cdot \Big| \qquad E'\left(1-\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}(\vec\sigma\vec\nabla)^2\right)\psi_{шр} =$$

$$= \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec\sigma\vec\nabla)^2+e\varphi\right)\left(1+\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\overset{(-)???}{(\vec\sigma\vec\nabla)^2}\right)+\frac{\hbar^2}{4m^2c^2}(\vec\sigma\vec\nabla)e\varphi\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(\vec\sigma\vec\nabla)\right]\psi_{шр}$$

$$E'\Psi_{шр} = \Big[-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec\sigma\vec D)^2 + e\varphi - \frac{\hbar^2}{16m^3c^2}(\vec\sigma\vec D)^4 - \frac{\hbar^2}{16m^3c^2}(\vec\sigma\vec D)^4 +$$

$$+ e\varphi\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}(\vec\sigma\vec D)^2 + \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}(\vec\sigma\vec D)^2 e\varphi - \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}(\vec\sigma\vec D)e\varphi \cdot$$

$$\cdot(\vec\sigma\vec D)\Big]\Psi_{шр}$$

$$E'\Psi_{шр} = \Big\{-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec\sigma\vec D)^2 + e\varphi - \frac{\hbar^2}{8m^3c^2}(\vec\sigma\vec D)^4 + e\varphi\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\underbrace{(\vec\sigma\vec D)^2}_{(\vec\sigma\vec\nabla)^2\to\vec\nabla^2} +$$

$$+\frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\underbrace{(\vec\sigma\vec D)^2}_{(\vec\sigma\vec\nabla)^2\to\vec\nabla^2}e\varphi - \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}\underbrace{(\vec\sigma\vec D)e\varphi(\vec\sigma\vec D)}_{\to(\vec\sigma\vec\nabla)\to\vec\nabla^2}\Big\}\Psi_{шр}$$

$$\sigma_a\sigma_b\partial_a\partial_b = \frac{1}{2}\{\sigma_a\sigma_b\}\partial_a\partial_b = \delta_{ab}\partial_a\partial_b = \partial^2 = \vec\nabla^2$$

$$e\varphi\vec\nabla^2 + \vec\nabla^2 e\varphi - 2(\vec\sigma\vec\nabla)e\varphi(\vec\sigma\vec\nabla) = e\varphi\vec\nabla^2 + e\varphi\vec\nabla^2 +$$

$$+2\vec\nabla(e\varphi)\vec\nabla + \vec\nabla^2(e\varphi) - 2e\varphi(\vec\sigma\vec\nabla)^2 - 2\sigma_a\partial_a(e\varphi)\sigma_b\partial_b =$$

$$= \vec\nabla^2(e\varphi) + 2\partial_a(e\varphi)\partial_a - 2(\delta_{ab} + i\varepsilon_{abc}\sigma_c)\partial_a(e\varphi)\partial_b =$$

$$= \vec\nabla^2(e\varphi) - 2i\varepsilon_{abc}\sigma_c\partial_a(e\varphi)\partial_b = \vec\nabla^2(e\varphi) + 2ie\vec\sigma[\vec E\vec\nabla]$$

$$\to E'\Psi_{шр} = \Big\{-\frac{\hbar^2}{2m}\overbrace{(\vec\sigma\vec D)^2}^{\vec\nabla^2} + e\varphi - \frac{\hbar^2}{8m^3c^2}\overbrace{(\vec\sigma\vec D)^4}^{\vec\nabla^4} + \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\cdot$$

$$\cdot\Big[\vec\nabla^2(e\varphi) + 2ie\vec\sigma[\vec E\times\vec\nabla]\Big]\Big\}\Psi_{шр}$$

→ спин-орбитальное взаимодействие

- Есть атом водорода, надо получить его тонкую структуру

$$e\varphi = -\frac{Ze^2}{r}$$