Новикова
332

① Д-ть: $[f(\hat{x}), \hat{p}] = c \cdot f'(\hat{x})$

Д: $[f(\hat{x}), \hat{p}] =$ /по определению/ $=$

$$= f(\hat{x})\,\hat{p}\,\psi(x) - \hat{p}\,f(\hat{x})\,\psi(x) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \hat{x} \to x \\ \hat{p} \to -i\hbar \dfrac{d}{dx} \end{matrix} \right\| =$$

$$= -f(x)\, i \frac{d}{dx}\psi(x) + i\hbar \frac{d}{dx}\big(f(x)\,\psi(x)\big) =$$

$$= -f(x)\, i \cancel{\frac{d}{dx}\psi(x)} + i\hbar \frac{d f(x)}{dx}\cdot \psi(x) + i\hbar \cancel{\frac{d\psi(x)}{dx}\cdot f}$$

$$= \underbrace{i\hbar}_{c = const} \frac{d}{dx} f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f(\hat{x}), \hat{p}] = c \cdot f'(\hat{x})$$

② начало $[\hat{l}_i, \hat{l}_k] = ?$

$$\hat{l}_i = ([\hat{x}, \hat{p}])_i = \varepsilon_{ine} \hat{x}_n \hat{p}_e \qquad \hat{l}_k = ([\hat{x}\hat{p}])_k = \varepsilon_{ksr}$$

$$[\hat{l}_i, \hat{l}_k] = [\varepsilon_{ine} \hat{x}_n \hat{p}_e, \varepsilon_{ksr} \hat{x}_s \hat{p}_r] = \varepsilon_{ine}\varepsilon_{ksr} [\hat{x}_n \hat{p}_e, \hat{x}_s \hat{p}_r]$$

$$= \varepsilon_{ine}\varepsilon_{ksr} (\hat{x}_n [\hat{p}_e, \hat{x}_s \hat{p}_r] + [\hat{x}_n, \hat{x}_s \hat{p}_r] \hat{p}_e) =$$

$$= \varepsilon_{ine}\varepsilon_{ksr} (-\hat{x}_n [\hat{x}_s \hat{p}_r, p_e] - [\hat{x}_s \hat{p}_r, x_n] \hat{p}_e) =$$

$$= -\varepsilon_{ine}\varepsilon_{ksr} (\hat{x}_n \hat{x}_s [\hat{p}_r, \hat{p}_e] + \hat{x}_n [\hat{x}_s \hat{p}_e] \hat{p}_r +$$
$$+ \hat{x}_s [\hat{p}_r \hat{x}_n] p_e + [\hat{x}_s \hat{x}_n] \hat{p}_r \hat{p}_e] =$$

$$= -\varepsilon_{ine}\varepsilon_{ksr} (-i\hbar \delta_{se} \hat{x}_n \hat{p}_r + i\hbar \delta_{nr} \hat{x}_s \hat{p}_e) =$$

$$= \varepsilon_{ine}\varepsilon_{ksr} 2\hbar \delta_{se} \hat{x}_n \hat{p}_r - \varepsilon_{ine}\varepsilon_{ksr} i\hbar \delta_{nr} \hat{x}_s \hat{p}_e =$$

$$= i\hbar (\varepsilon_{ine}\varepsilon_{ker} \hat{x}_n \hat{p}_r - \varepsilon_{ine}\varepsilon_{ksn} \hat{x}_s \hat{p}_e) =$$

$$= i\hbar (-\varepsilon_{ein}\varepsilon_{ekr} \hat{x}_n \hat{p}_r + \varepsilon_{nie}\varepsilon_{nks} \hat{x}_s \hat{p}_e) =$$

$$= i\hbar (-(\delta_{ik}\delta_{nr} - \delta_{ir}\delta_{nk}) \hat{x}_n \hat{p}_r + (\delta_{ik}\delta_{es} - \delta_{is}\delta_{ek}) \hat{x}_s \hat{p}_e) =$$

$$= i\hbar (-\delta_{ik}\delta_{nr} \hat{x}_n \hat{p}_r + \delta_{ir}\delta_{nk} \hat{x}_n \hat{p}_r + \delta_{ik}\delta_{es} \hat{x}_s \hat{p}_e - \delta_{is}\delta_{ek} \hat{x}_s \hat{p}_e$$

$$= i\hbar (-\delta_{ik} \hat{x}_n \hat{p}_n + \delta_{ir} \hat{x}_k \hat{p}_r + \delta_{ik} \hat{x}_s \hat{p}_s - \delta_{is} \hat{x}_s \hat{p}_k) =$$

$$= i\hbar (\hat{x}_k \hat{p}_i - \hat{x}_i \hat{p}_k)$$

(до этого момента должны, по идее,
уметь все, т.к. это было
на семинаре)

2

(продолжение решения)

$$[\hat{l}_i \hat{l}_k] = i\hbar[\hat{x}_k \hat{p}_i - \hat{x}_i \hat{p}_k]$$

$$[\hat{l}_i \hat{l}_k] = c \cdot \varepsilon_{ikj} \hat{l}_j$$

$$\hat{l}_j = \varepsilon_{jnm} \hat{x}_n p_m$$

<u>Реш</u>:

$$[\hat{l}_i \hat{l}_k] = c \cdot \varepsilon_{ikj} \varepsilon_{jnm} \hat{x}_n \hat{p}_m =$$

$$= \| \varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jik} \| =$$

$$= c\, \varepsilon_{jik} \varepsilon_{jnm} \hat{x}_n \hat{p}_m =$$

$$= c(\delta_{in}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kn}) \hat{x}_n \hat{p}_m =$$

$$= c(\delta_{in}\delta_{km} \hat{x}_n \hat{p}_m - \delta_{im}\delta_{kn} \hat{x}_n \hat{p}_m) =$$

$$= c(\delta_{in} \hat{x}_n \hat{p}_k - \delta_{im} \hat{x}_k \hat{p}_m) =$$

$$= c(\hat{x}_i \hat{p}_k - \hat{x}_k \hat{p}_i)$$

должно быть равно $[\hat{x}_k \hat{p}_i - \hat{x}_i \hat{p}_k] \Rightarrow$

$$\Rightarrow c = -i\hbar$$

③ $[\hat{P}_n, \hat{P}_m] = ?$ $\quad \hat{P} = \hat{p} - \frac{e}{c}\hat{A}$

Реш: $[\hat{P}_n, \hat{P}_m] =$

$$\cancel{= \hat{P}_n \hat{P}_m \Psi(x) - \hat{P}_m \hat{P}_n \Psi(x) =}$$
$$\cancel{= \hat{p}_n \hat{p}_m \Psi(x) - \hat{p}_m \hat{p}_n \Psi(x)}$$

$$= [\hat{p}_m - \frac{e}{c}\hat{A}_m, \hat{p}_n - \frac{e}{c}\hat{A}_n] =$$

$$= [\hat{p}_m, \hat{p}_n - \frac{e}{c}\hat{A}_n] - \frac{e}{c}[\hat{A}_m, \hat{p}_n - \frac{e}{c}\hat{A}_n] =$$

$$= [\hat{p}_m, \hat{p}_n] - \frac{e}{c}[\hat{p}_m, \hat{A}_n] - \frac{e}{c}[\hat{A}_m, \hat{p}_n] + \frac{e^2}{c^2}[\hat{A}_m, \hat{A}_n]$$

$$= -\frac{e}{c}\left([\hat{p}_m, \hat{A}_n] + [\hat{A}_m, \hat{p}_n]\right) =$$

1) $[\hat{p}_m, \hat{A}_n] = \hat{p}_m \hat{A}_n(x)\Psi(x) - \hat{A}_n \hat{p}_m \Psi(x) = \| \hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx} \|$

$$= -i\hbar \frac{d}{dx}\left(A_n(x)\Psi(x)\right) + \hat{A}_n i\hbar \frac{d}{dx}\Psi(x) =$$

$$= -i\hbar\left(A_n'(x)\Psi(x) + A_n(x)\Psi'(x)\right) + \hat{A}_n i\hbar \Psi'(x) =$$

$$= -i\hbar \cdot A_n'(x)\Psi(x)$$

2) $[\hat{A}_m, \hat{p}_n] = \hat{A}_m \hat{p}_n \Psi(x) - \hat{p}_n \hat{A}_m \Psi(x) = \| \hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$

$$= -i\hbar \hat{A}_m \frac{d}{dx}\Psi(x) + i\hbar \frac{d}{dx}\left(\hat{A}_m(x)\Psi(x)\right) =$$

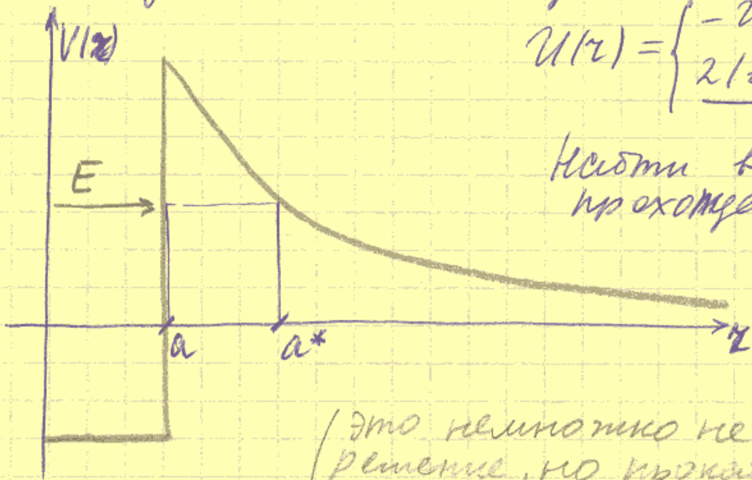
$$= -i\hbar \hat{A}_m \Psi'(x) + i\hbar\left(A_m'(x)\Psi(x) + A_m(x)\Psi'(x)\right) =$$

$$= i\hbar A_m'(x)\Psi(x) \quad //$$

$$= -\frac{e}{c}\left(-i\hbar A_n'(x)\Psi(x) + i\hbar A_m'(x)\Psi(x)\right) =$$

$$= \frac{e}{c} i\hbar \Psi(x)\left(A_n'(x) - A_m'(x)\right)$$

④ Модель α-распада:
Прохожд. частицы с энергией E через потенциал вида:



$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & r \le a \\ \dfrac{2(Z-2)e^2}{r} & r > a \end{cases}$$

Найти вер. прохождения

(это немножко не то решение, но прокатит!)

<u>Решение</u>: У.Ш. для обл-ти „под барьером“:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' + \left(E - \frac{2(Z-2)e^2}{r}\right)\Psi = 0, \text{ об. } \varkappa = \frac{2m}{\hbar}\left(E - \frac{2(Z-2)}{r}e^2\right)$$

$$\Rightarrow \Psi = \underbrace{C_1 e^{i\varkappa x}}_{\text{движение налево} = 0} + C_2 e^{-i\varkappa x}$$

для блондинок: движение налево не имеет физического смысла

вероятность α-частице вылететь за барьер это отношение вероятностей обнаружить частицу в т. a к вер-ти обнаруж. частицу в т. a^*

$$P = \left|\frac{C_2 e^{-i\varkappa a}}{C_2 e^{-i\varkappa a^*}}\right|^2 = \exp\{-i\varkappa|a-a^*|\} =$$

$$= \exp\left\{-i\frac{2m}{\hbar}\int_a^{a^*}\left(E - \frac{2(Z-2)}{r}e^2\right)dr\right\}$$

5 Найти фазовую и групповую скорость для e^-, движ-ся со скор. v в релятивистск. и нерелятив. случ.

1) нерелятевистский случ.

$$E = \frac{p^2}{2m} \qquad E = \hbar\omega$$

~~Найдём~~ ~~ф~~

Своб. движ. e^- с импульсом p опис-ся волн. ф-цией, соответствующей плоской волне де-Бройля

$$\Psi(r,t) = A \cdot \exp\left(i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)\right)$$

$$\underbrace{\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{p^2}{2m\hbar}}, \quad \underbrace{\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}}$$

Фазовая скорость:

$$v_{фаз} = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{E}{p} = \frac{\frac{p^2}{2m}}{p} = \underbrace{\frac{p}{2m}}$$

Если учесть внутр. эн. частицы то

$$\underbrace{E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}}$$

мы рассм. нерел. случай: $E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \ldots$

$$\Rightarrow v_{фаз} = \frac{mc^2}{p} + \frac{p}{2m}$$

в релятевистском случ: $E = \frac{c^2 p}{v}$

$$\Rightarrow \underbrace{v_{фаз} = \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v}}$$

Групповая скорость:

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d\hbar k} = \frac{dE}{dp}$$

1) для нерел. случ:

$$v_{гр} = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}\frac{p^2}{2m} = \frac{p}{m} = \frac{mv}{m} = v$$

т.е. просто скорость частицы

2) для рел. случая:

$$v_{гр} = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4} = \frac{1}{2}\,\frac{2pc^2}{c\sqrt{p^2+m^2c^2}} =$$

$$= \frac{pc}{\sqrt{p^2+m^2c^2}} = \frac{mv\cdot c\gamma}{\sqrt{m^2v^2+m^2c^2}} = \cancel{\frac{vc}{\sqrt{v^2+c^2}}}$$

6

Определить время расплывания пакета частицы:

а) $m = 1$ гр $\qquad$ б) $m \sim 10^{-27}$ гр

$\Delta x \simeq 0{,}1$ см $\qquad$ $\Delta x \sim 10^{-8}$ см

$$t_{\text{распл}} = \frac{2\pi}{(\Delta k)^2 \omega_0''} = \frac{(\Delta x)^2}{2\pi\hbar \dfrac{d^2\varepsilon}{dp^2}}$$

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \frac{d^2\varepsilon}{dp^2} = \frac{1}{m}$$

а) $t_{\text{распл}} = \dfrac{(0{,}1)^2 \cdot 1}{2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}05\cdot 10^{-27}} \simeq$

$\simeq 0{,}0015\cdot 10^{27} \simeq 1{,}5\cdot 10^{24}$ сек

б) $t_{\text{распл}} = \dfrac{(10^{-8})^2\cdot 10^{-27}}{2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}05\cdot 10^{-27}} =$

$= 0{,}15\cdot 10^{-16}$ сек

С заранее известным ответом совпадает! =)

⑦ Д-ть:

$$(*)\begin{cases} \delta = \operatorname{arcctg}\sqrt{\dfrac{2mV_1}{k^2\hbar^2}-1} + n\pi & (1) \\ ka+\delta = -\operatorname{arcctg}\sqrt{\dfrac{2mV_2}{k^2\hbar^2}-1} + m\pi & (2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (**) \begin{cases} \delta = \arcsin\dfrac{k\hbar}{\sqrt{2mV_1}} + n\pi & (1) \\ ka+\delta = -\arcsin\dfrac{k\hbar}{\sqrt{2mV_2}} + \pi m & (2) \end{cases}$$

Д: 1) Рассмотрим (1)(**):

$$\delta = \arcsin\frac{k\hbar}{\sqrt{2mV_1}} + n\pi \Leftrightarrow \sin\delta = \frac{k\hbar}{\sqrt{2mV_1}};$$

$$\Rightarrow \cos\delta = \sqrt{1-(\sin\delta)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg}\delta = \frac{\cos\delta}{\sin\delta} = \frac{\sqrt{1-(\sin\delta)^2}}{\sin\delta} = \sqrt{\frac{1-(\sin\delta)^2}{(\sin\delta)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(\sin\delta)^2}-1} = \sqrt{\frac{1}{\frac{k^2\hbar^2}{(2mV_1)}}-1} = \sqrt{\frac{2mV_1}{k^2\hbar^2}-1}$$

Т.е. мы получили $\operatorname{ctg}\delta = \sqrt{\dfrac{2mV_1}{k^2\hbar^2}-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \delta = \operatorname{arcctg}\sqrt{\dfrac{2mV_1}{k^2\hbar^2}-1} + \pi n$, что

2) Рассмотрим (2)(**):

$$ka+\delta = -\arcsin\frac{k\hbar}{\sqrt{2mV_2}} + \pi m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(ka+\delta) = -\frac{k\hbar}{\sqrt{2mV_2}};$$

$$\Rightarrow \cos(ka+\delta) = \sqrt{1-\left(-\frac{k\hbar}{\sqrt{2mV_2}}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg}(ka+\delta) = \frac{\cos(ka+\delta)}{\sin(ka+\delta)} = \frac{\sqrt{1-(\dots)^2}}{-\frac{k\hbar}{\sqrt{2mV_2}}} =$$

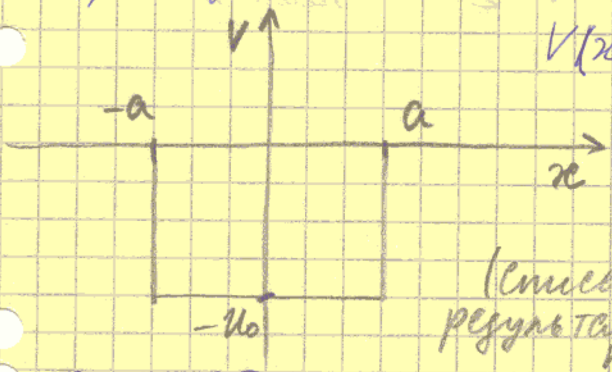
$$= -\sqrt{\frac{1-(\dots)^2}{(\dots)^2}} = -\sqrt{\frac{2mV_2}{k^2\hbar^2}-1}$$

т.е. мы получили

$$\operatorname{ctg}(\kappa a+\delta) = -\sqrt{\frac{2mV_2}{k^2\hbar^2}-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa a+\delta = -\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{2mV_2}{k^2\hbar^2}-1} + \pi m$$

⑧ Найти связанные состояния и соотв. им собственные знач. в случае прямоуг. пот. ямы



$$V(x) = \begin{cases} -U_0 & |x| \le a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

(Списано из Елютина, за результат ответственности не несу!)

Реш: в безразмерных переменных $y = \frac{x}{a}$, $\mathcal{E} = -\frac{E}{U_0}$

Уравн. Шредингера: $-\frac{1}{B}\Psi'' - f(y)\Psi = -\mathcal{E}\Psi$

где $B = \frac{2mU_0 a^2}{\hbar^2}$ – борновский параметр

$f(y) = 1$, при $|y| < 1$; $f(y) = 0$ при $|y| > 1$.

Решение уравн. Шр $\Psi = A \cdot \exp\{-\sqrt{B\mathcal{E}}\, y\}$

$U(x)$ – чётн $\Rightarrow \Psi$ либо четное, либо нечётное

$\Rightarrow$ реш. внутри ямы: $\Psi_{чёт}(y) = \cos\sqrt{B(1-\mathcal{E})}\, y$

$\Psi_{нечёт}(y) = \sin\sqrt{B(1-\mathcal{E})}\, y$

Условия сшивки (в „точке" $y = 1$)

1) $\cos\sqrt{B(1-\mathcal{E})}\, y = A \cdot \exp\{-\sqrt{B\mathcal{E}}\, y\}$ (*)

2) $-\sqrt{B(1-\mathcal{E})}\sin\sqrt{B(1-\mathcal{E})}\, y = -\sqrt{B\mathcal{E}}\, A \cdot \exp\{-\sqrt{B\mathcal{E}}\}y$ (**)

поделим (**) на (*)

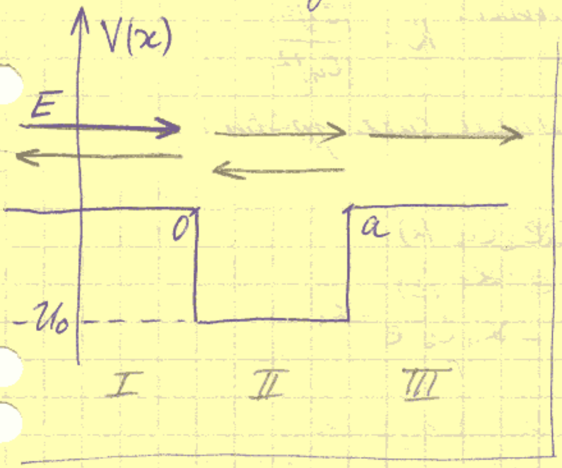
$\Rightarrow \operatorname{tg}\sqrt{B(1-\mathcal{E})}\, y = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1-\mathcal{E}}} = F_{чёт}(\mathcal{E})$

для нечетных: (аналогично)

$$\operatorname{tg}\sqrt{B(1-\varepsilon)}\,y = -\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} = F_{неч}(\varepsilon)$$

9. Найти коэфф-т отражения при налетании на пот. яму

$$V(x) = \begin{cases} -U_0 & 0 \le x \le a \\ 0 & x > a \text{ и } x < 0 \end{cases}$$



Решение:

I $\frac{\hbar^2}{2m}\psi_I'' + E\psi_I = 0$

$\psi_I'' + \varkappa_1^2 \psi_I = 0$, где мы обозначим $\varkappa_1^2 = \frac{2m}{\hbar} E$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \psi_I = \underbrace{C_1 e^{i\varkappa_1 x}}_{\text{движение налево}} + \underbrace{C_2 e^{-i\varkappa_1 x}}_{\text{движение направо}} \qquad C_2 = 1$$

II $\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{II}'' + (E + U_0)\psi_{II} = 0 \Rightarrow \psi_{II}'' + \varkappa_2^2 \psi_{II} = 0$, где $\varkappa_2^2 = \frac{2m}{\hbar}($

$$\Rightarrow \psi_{II}'' = C_3 e^{i\varkappa_2 x} + C_4 e^{-i\varkappa_2 x}$$

III то же, что и I $\Rightarrow \psi_{III} = C_5 e^{i\varkappa_1 x} + C_6 e^{-i\varkappa_1 x}$,

$$C_5 = 0$$

Сшивка:

в $(\cdot)$ 0: $\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow \underline{C_1 + 1 = C_3 + C_4}$ (1)

$\psi_I'(0) = \psi_{II}'(0) \Rightarrow i\varkappa_1 C_1 e^{i\varkappa_1 \cdot 0} - i\varkappa_1 e^{-i\varkappa_1 \cdot 0} = i\varkappa_2 C_3 e^{i\varkappa_2 \cdot 0} -$

$- i\varkappa_2 C_4 e^{-i\varkappa_2 \cdot 0}$, $\Rightarrow \underline{i\varkappa_1 C_1 - i\varkappa_1 = i\varkappa_2 C_3 - i\varkappa_2 C_4}$ (2)

в $(\cdot)$ a: $\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) \Rightarrow \underline{C_3 e^{i\varkappa_2 a} + C_4 e^{-i\varkappa_2 a} = C_6 e^{-i\varkappa_1}}$

$\psi_{II}'(a) = \psi_{III}''(a) \Rightarrow \underline{i\varkappa_2 C_3 e^{i\varkappa_2 a} - i\varkappa_2 e^{-i\varkappa_2 a} = -i\varkappa_1 C_6 e^{-i\varkappa_1}}$

Коэфф-т отражения от 1ой стенки $R = \frac{|C_1|^2}{|C_2|^2} = |C_1|^2$

Коэфф-т отраж. от 2ой стенки: $R = \frac{|C_3|^2}{|C_4|^2}$

какой из них нужен, неизвестно...

Чтобы их найти, решаем сист. уравн:

$$\begin{cases} C_1 + 1 = C_3 + C_4 & (1) \\ æ_1 C_1 - æ_1 = æ_2 C_3 - æ_2 C_4 & (2) \\ C_3 e^{æ_2} + C_4 e^{-æ_2} = C_6 e^{-æ_1} & (3) \\ æ_2 C_3 e^{æ_2} - æ_2 C_4 e^{-æ_2} = -æ_1 C_6 e^{-æ_1} \end{cases}$$

→ надо решить систему и найти все коэфф-ты, но меня ломает! :)

(11) Выразить 1) $\hat{p}^2$ и 2) $\hat{H}$ ч/з $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ для осциллятора

<u>Реш</u>: 2) Для осциллятора $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}$, (известно)

$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$ – выражение гамильтониана $\hat{H}$ ч/з $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$

Δ: $\hat{a} = \frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$, $\hat{a}^+ = \frac{m\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$

$$\Rightarrow \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\frac{(m\omega\hat{x} + i\hat{p})(m\omega\hat{x} - i\hat{p})}{2m\omega\hbar} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \hbar\omega\left(\frac{m^2\omega^2\hat{x}^2 - (i)^2\hat{p}^2}{2m\omega\hbar} + \frac{1}{2}\right.$$

$$= \underbrace{\frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} + \frac{\hat{p}^2}{2m}}_{H_0} + \frac{1}{2}\hbar\omega \qquad \text{\#}$$

Смысл: „нулевые колебания"

2) $\hat{p} = -\frac{\sqrt{2m\omega\hbar}}{2i}\left(\hat{a}^+ - \hat{a}\right)$

$$\Delta: -\frac{\sqrt{2m\omega\hbar}}{2i}\left(\hat{a}^+ - \hat{a}\right) = -\frac{\sqrt{2m\omega\hbar}}{2i}\left(\frac{(m\omega\hat{x} - i\hat{p}) - (m\omega\hat{x} + i\hat{p})}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\right) =$$

$$= \frac{+2i\hat{p}}{2i} = \hat{p} \qquad \text{\#}$$

Это решение не совсем то, что нужно, т.к. я решала „с конца", а надо, (удивительный факт!) с начала

(12) Для осциллятора вычислить $\langle n|\hat x \hat p|m\rangle$ используя $\hat a = \frac{m\omega\hat x + i\hat p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$ и $\hat a^+ = \frac{m\omega\hat x - i\hat p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$

Реш:

$$\langle n|\hat x \hat p|m\rangle =$$

$$= \Big\| \hat x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat a + \hat a^+),\ \hat p = \frac{\sqrt{2m\omega\hbar}}{2i}(\hat a^+ - \hat a) \Big\|$$

$$\frac{\sqrt{2m\omega\hbar}}{2i}(\hat a^+ - \hat a)|m\rangle =$$

$$= \langle n|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat a + \hat a^+)\frac{\sqrt{2m\omega\hbar}}{2i}\sqrt{m+1}\,|m+1\rangle -$$

$$- \langle n|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat a + \hat a^+)\frac{\sqrt{2m\omega\hbar}}{2i}\sqrt{m}\,|m-1\rangle =$$

$$= \langle n|\frac{\hbar}{2i}\sqrt{m+1}(\hat a + \hat a^+)|m+1\rangle - \langle n|\frac{\hbar}{2i}\sqrt{m}(\hat a + \hat a^+)|m-1\rangle =$$

$$= \langle n|\frac{\hbar}{2i}\sqrt{m+1}\sqrt{m+1}|m\rangle + \langle n|\frac{\hbar}{2i}\sqrt{m+1}\sqrt{m+2}|m+2\rangle -$$

$$- \langle n|\frac{\hbar}{2i}\sqrt{m}\sqrt{m-1}|m-2\rangle - \langle n|\frac{\hbar}{2i}\sqrt{m}\sqrt{m}|m\rangle =$$

$$= \frac{\hbar}{2i}\Big(\langle n|m+1|m\rangle + \langle n|\sqrt{m+1}\sqrt{m+2}|m+2\rangle -$$

$$- \langle n|\sqrt{m}\sqrt{m-1}|m-2\rangle - \langle n|m|m\rangle\Big) =$$

$$= \frac{\hbar}{2i}\Big((m+1)\delta_{n,m} + \sqrt{(m+1)(m+2)}\,\delta_{n,m+2} - \sqrt{m(m-1)}\,\delta_{n,m-2} - m\delta_{n,m}\Big)$$

дальше этого места не надо

(15) Вычислить $\frac{d\langle\vec{r}\rangle}{dt}$ для $\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\hat{\vec{A}}\right)^2$

если $\hat{A} = (\hat{y}\mathcal{H}, 0, 0)$, где $\mathcal{H} = const$

Реш: теорема Эренфеста:

$$\frac{d\langle\vec{r}\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H}, \hat{\vec{r}}]\rangle$$

$$[\hat{H}, \hat{\vec{r}}] = \sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}[\hat{H}_n, \hat{x}_k] = \frac{1}{2m}\sum_n\sum_k\left[\left(\hat{p}_n - \frac{e}{c}\hat{A}_n\right)^2, \hat{x}_k\right] =$$

$$= \frac{1}{2m}\sum_n\sum_k\left[\left(\hat{p}_n^2 - 2\frac{e}{c}\hat{p}_n\hat{A}_n + \frac{e^2}{c^2}\hat{A}_n^2\right), \hat{x}_k\right] =$$

$$= \| [\hat{A}+\hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}] \| =$$

$$= \frac{1}{2m}\sum_n\sum_k\left([\hat{p}_n^2, \hat{x}_k] - 2\frac{e}{c}[\hat{p}_n\hat{A}_n, \hat{x}_k] + \frac{e^2}{c^2}[\hat{A}_n^2, \hat{x}_k]\right) =$$

$$= \| [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \| =$$

$$= \frac{1}{2m}\sum_n\sum_k\Big\{\hat{p}_n[\hat{p}_n, \hat{x}_k] + [\hat{p}_n, x_k]\hat{p}_n - 2\frac{e}{c}\Big(\hat{p}_n[\hat{A}_n, \hat{x}_k] + [\hat{p}_n, \hat{x}_k]\ldots$$

$$+ \frac{e^2}{c^2}\left(\hat{A}_n[\hat{A}_n, \hat{x}_k] + [\hat{A}_n, \hat{x}_k]\hat{A}_n\right)\Big\} = \| [\hat{p}_n, \hat{x}_k] = -i\hbar\delta_{nk}$$

из семинаров:)

$= \|$ т.к. $A = \{\mathcal{H}\hat{y}, 0, 0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$[A_1, x_k] = \mathcal{H}[\hat{y}, \hat{x}_k] = \delta_{2k} \neq 0$~~, $[A_2, x_k] = [0, \hat{x}_k] = 0$, $[A_3, \hat{x}_k] =$

$[A_1, \hat{x}_k] = \mathcal{H}[\hat{y}, \hat{x}_k] = \mathcal{H}\,\delta_{2k} = \mathcal{H}([\hat{y}\hat{x}] + [\hat{y}, \hat{y}] + [\hat{y}, \hat{z}]$

$= \mathcal{H}(\cancel{\delta_{21}} + \cancel{\delta_{23}}) = 0 \;\|$

для блондинок: $\delta_{nm} = 0$ если $n \neq m$

$$= \frac{1}{2m}\sum_n\sum_k\left(\hat{p}_n(-i\hbar\delta_{nk}) - i\hbar\delta_{nk}\hat{p}_n - 2\frac{e}{c}(\hat{p}_n \cdot 0 - i\hbar\delta_{nk}\hat{A}_n)\right)$$

$$= \frac{1}{2m}\sum_n\sum_k\left(-2i\hbar\hat{p}_n\delta_{nk} + 2\frac{e}{c}i\hbar\delta_{nk}\hat{A}_n\right) = \left\| \begin{array}{l}\hat{p}_n\delta_{nk} = \hat{p}_k \\ \hat{A}_n\delta_{nk} = \hat{A}_k\end{array} \right\|$$

$$= \frac{1}{m}\sum_k\left(-i\hbar\hat{p}_k + \frac{e}{c}i\hbar A_k\right) = \frac{1}{m}\left(-i\hbar\hat{\vec{p}} + \frac{e}{c}i\hbar\hat{\vec{A}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\langle \hat{\vec{r}} \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left\langle \left(\frac{1}{m}\left(-i\hbar\hat{\vec{p}} + \frac{e}{c}\, i\hbar \hat{A}\right)\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\langle \hat{\vec{p}} \rangle - \frac{e}{c}\, \langle \hat{A} \rangle\right)$$

(21) Рассм. поправки к энергии для $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2}$ (осциллятор)
при наличии малого возмущ. $\hat{V} = \alpha \hat{x}$.
Найти во 2 пор. к n-му ур. энергии

Решение: Энергия n-го уровня:

$$\mathcal{E}_n = \underbrace{\mathcal{E}_n^0}_{\text{0-й порядок}} + \underbrace{V_{nn}}_{\text{1-й порядок}} + \underbrace{\sum_{m \neq n} \frac{|V_{mn}|^2}{\mathcal{E}_n^0 - \mathcal{E}_m^0}}_{\text{2-ой порядок}}$$

Поправка к энергии 1-го порядка:

$$V_{nn} = \langle n | \hat{V} | n \rangle = 0$$

Поправка к энергии 2-го порядка:
ищем... 1) вычислим V_{mn}

$$V_{mn} = \langle n | \hat{V} | m \rangle = \langle n | \alpha \hat{x} | m \rangle = \Big/\!\!\Big/ \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^+) \Big/\!\!\Big/$$

$$= \langle n | \alpha \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^+) | m \rangle = \Big/\!\!\Big/ \text{по св-вам оп-ров } \hat{a} \text{ и } \hat{a}^+ \Big/\!\!\Big/ =$$

$$= \langle n | \alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{m} \, | m-1 \rangle + \sqrt{m+1} \, | m+1 \rangle \right) =$$

$$= \Big/\!\!\Big/ \langle n | m \rangle = \delta_{nm} \Big/\!\!\Big/ = \alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{m} \, \delta_{n,m-1} + \sqrt{m+1} \, \delta_{n,m+1} \right)$$

2) вычислим Σ:

$$\sum_{m \neq n} |V_{mn}|^2 = \sum_{m \neq n} V_{mn}^* V_{mn} =$$

$$= \sum_{m \neq n} \langle n | \hat{V} | m \rangle \langle m | \hat{V} | n \rangle = \Big/\!\!\Big/ \text{бутерброд с шиpoй!} \Big/\!\!\Big/$$

$$= \langle n | \hat{V}^2 | n \rangle = \langle n | \alpha^2 \hat{x}^2 | n \rangle \ominus$$

$$= \Big/\!\!\Big/ \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^+) \Rightarrow \hat{x}^2 = \hat{x}\hat{x} =$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a} + \hat{a}^+)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}^2 + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^{+2}) \Big/\!\!\Big/ =$$

$$\ominus \; \alpha^2 \langle n | \frac{\hbar}{2m\omega} (a^2 + \hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^{+2}) | n \rangle$$

$= //$ есть такие тела:

1) $\langle n | \hat{x} | m \rangle = \langle n | \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^{+}) | m \rangle =$

$= //$ св-ва $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $\hat{a}^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle // =$

$= \langle n | \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} \sqrt{n} | n-1 \rangle + \langle n | \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} \sqrt{n+1} | n+1 \rangle = // \langle n | m \rangle = \delta_{nm} //$

$= \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} (\sqrt{n} \cdot \delta_{n,n-1} + \sqrt{n+1}\, \delta_{n,n+1})$;

2) $\langle m | \hat{x} | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} (\sqrt{m}\, \delta_{n,m-1} + \sqrt{m+1}\, \delta_{n,m+1})$ - аналогично

$\Rightarrow \Delta \mathcal{E}_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle n | \alpha \hat{x} | m \rangle \langle m | \alpha \hat{x} | n \rangle}{\mathcal{E}_n^0 - \mathcal{E}_m^0} =$

$= // \mathcal{E}_n^0 = \hbar\omega (n + \frac{1}{2}) \Rightarrow (\mathcal{E}_n^{(0)} - \mathcal{E}_m^{(0)}) = \hbar\omega (n + \frac{1}{2} - m - \frac{1}{2}) = \hbar\omega (n-m) //$

$$= \sum_{m \neq n} \frac{\alpha^2 \frac{\hbar}{2M\omega}}{\hbar\omega} \frac{(\sqrt{m}\, \overset{n=m-1}{\delta_{n,m-1}} + \sqrt{m+1}\, \overset{n=m+1}{\delta_{n,m+1}})(\sqrt{n}\, \overset{n=m+1}{\delta_{m,n-1}} + \sqrt{n+1}\, \overset{n=m-1}{\delta_{m,n+1}})}{(n-m)}$$

$$= \sum_{m \neq n} \frac{\alpha^2}{2M\omega^2} \Big(\frac{\sqrt{m}\sqrt{n}\, \delta_{n,m-1}\delta_{m,n-1} + \sqrt{m}\sqrt{n+1}\, \delta_{n,m-1}\delta_{m,n+1} +}{(n-m)}$$

$$+ \frac{\sqrt{m+1}\sqrt{n}\, \delta_{n,m+1}\delta_{m,n-1} + \cancel{\sqrt{m+1}\sqrt{n+1}\, \delta_{n,m+1}\delta_{m,n+1}}}{}$$

Одновременно не достигаются $n = m-1$ и $m = n-1$ $\Rightarrow$ 1ое слагаемое $= 0$

Одновременно не достигаются $n = m+1$ и $m = n+1$ $\Rightarrow$ 4ое слагаемое $= 0$

$$= \sum_{m \neq n} \frac{\alpha^2}{2M\omega^2} \left(\left. \frac{\sqrt{m}\sqrt{n+1}}{(n-m)} \right|_{m=n+1} + \left. \frac{\sqrt{m+1}\sqrt{n}}{n-m} \right|_{m=n-1} \right) =$$

$$= \sum_{m \neq n} \frac{\alpha^2}{2M\omega^2} \left(\frac{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}}{(n-n-1)} + \frac{\sqrt{n}\sqrt{n}}{(n-n+1)} \right) = -\frac{\alpha^2}{2M\omega^2}$$

(22) Найти поправки в I прибл. теор. возмущений к с.з. энергии и правильные функ. 0-го прибл. для 2-кратно вырожд. уровня

Реш.: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$

$(\hat{H}_0 + \hat{V})\Psi_{n,i} = \mathcal{E}_n \Psi_{n,i}$ $\quad i = 1, \dots S$ в нашем случ. 2-х кратн. вырождение, $S = 2$.

Энергии $\mathcal{E}_n$ соотв. волн. функ. $\Psi_{n,i}$ (S штук волн. ф-ций)

$\hat{H}_0 \Psi^{(0)}_{n,i,\,\substack{-1\\0\\1}} = \mathcal{E}^{(0)}_n \Psi^{(0)}_{n,i,\,\substack{-1\\0\\1}}$

Рассмотрим л.к. вырожденного уровня

$\Psi^{(0)}_{n,i} = \sum\limits_j C_{ni,nj} \Psi^{(0)}_{n,j}$

$\Rightarrow \sum\limits_{j'=1}^{S} (\delta_{jj'} \mathcal{E}^1_n - V_{nj,nj'}) C_{ni,nj'} = 0$

Эта сист. имеет нетрив. решение $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det(V_{nj,nj'} - \mathcal{E}^1_n \delta_{jj'}) = 0$

В случае 2-х кратного вырождения уравнение имеет вид (в матричном виде):

$$\begin{pmatrix} V_{11} - \mathcal{E}^1 & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} - \mathcal{E}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathcal{E}^1)^2 - \mathcal{E}^1 (V_{11} + V_{22}) + V_{11} V_{22} - V_{12} V_{21} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{E}^1 = \frac{1}{2}(V_{11} + V_{22} \pm \hbar\omega^1)$, где

$\hbar\omega^1 = \sqrt{(V_{11} - V_{22})^2 - 4|V_{12}|^2}$

ε^1 – искомая поправка 1-го приближение к энергии уровня

Нихрена не понятно? =)

См. Елютина стр 114 – 115