Обработка результатов эксперимента

Содержание

Обозначения. В данном пособии встречаются греческие буквы Σ и σ — большая и маленькая сигма, Δ и δ — большая и маленькая дельта.

Σ применяется для сокращенной записи выражений, содержащих суммы. Снизу под знаком суммы указывается индекс суммирования и его начальное значение, сверху — его конечное значение:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Москва, 2020 г.

1 Физическая величина и ее измерение

Физическая величина — это количественная характеристика явления, процесса или свойства материи (материальных объектов). Каждая физическая величина должна иметь определение, содержащее однозначный способ экспериментального нахождения или расчёта данной физической величины в любой реальной ситуации.

Измерить физическую величину — это означает определить, сколько раз заключается в ней однородная с ней физическая величина, принятая в качестве единицы меры (единицы измерения, меры, единицы). Физические величины называют однородными, если они характеризуют одинаковые свойства материи и отличаются друг от друга только величиной. Единицы меры устанавливаются системой единиц измерения.

В результате измерения физической величины получается *значение* физической величины - именованное число, состоящее из числа и наименования той меры (единицы), которой была измерена физическая величина. Измерение — это, по существу, последовательность экспериментальных и вычислительных операций, осуществляемая с целью нахождения значения физической величины.

2 Классификация измерений

Проведем классификацию измерений физической величины по характеру последовательности осуществляемых при этом операций.

Прямое измерение. Измерение называется *прямым*, если значение физической величины определяется либо непосредственным сравнением с мерой, либо при помощи измерительного прибора, дающего сразу значение этой величины. Такая физическая величина называется прямо измеряемой.

Косвенное измерение. Измерение называется *косвенным*, если искомое значение физической величины определяется путем расчёта по известной зависимости измеряемой величины от прямо измеряемых величин, определяемых при неизменных условиях опыта. Такая физическая величина называется косвенно измеряемой.

Косвенно измеряемая физическая величина и связана с прямо измеряемыми величинами $x, y, \dots, z$ с помощью расчётной формулы (уравнения косвенных измерений)

$$u = f(x, y, \dots, z)$$

Получение расчётной формулы обычно связано с использованием законов физики и модельных представлений.

Совместные измерения. В общем случае измеряется набор величин $x, y, \dots, z$, связанных друг с другом некоторым уравнением, включающим неизвестные величины $a, b, \dots, c$, значения которых требуется определить:

$$f_{a,b,\dots,c}(x, y, \dots, z) = 0$$

Это уравнение называется уравнением совместных измерений.

Для случая двух прямо измеряемых величин x и y его часто можно представить в виде

$$y = f_{a,b,\dots,c}(x)$$

где $a, b, \ldots, c$ — искомые величины, выступающие в качестве параметров. Например, практически важным является случай линейной зависимости: $y = f_{a,b}(x) = ax + b$.

Чтобы найти значения параметров, проводятся многогократные измерения пар величин (x, y) при разных условиях опыта. Используя уравнение совместных измерений, по полученным n парам (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) восстанавливают неизвестные $a, b, \ldots, c$.

Обычно результаты совместных измерений для наглядности и контроля правильности обработки и интерпретации изображают в виде графика зависимости y от x. Экспериментальная точка на графике изображает результат i-го совместного измерения (x, y). Отметим, что каждое измерение (x, y) не обязательно должно быть результатом одного прямого измерения: оно может быть как результатом обработки серии прямых измерений, так и результатом косвенных измерений.

Как видим, одна и та же физическая величина может быть прямо или косвенно измеряемой или определяться в результате обработки результатов совместных измерений.

Пример. Три ученика (Иванов, Петров и Сидоров) получили задание: с помощью секундомера определить период колебаний маятника.

Иванов решил провести прямое измерение: непосредственно измерить время одного полного колебания.

Петров решил измерить время t, за которое маятник совершает n колебаний, и рассчитать период но формуле $T = t/n$. Данная формула является уравнением косвенных измерений, следовательно, Петров проводит косвенные измерения.

Сидоров решил последовательно измерить времена $t_1, t_2, \ldots, t_k$, за которые маятник совершает $n_1, n_2, \ldots, n_k$ колебаний. Таким образом, Сидоров целенаправленно изменяет значения одной из прямо измеряемых величин (в данном случае — числа колебаний n), проводя серию совместных измерений $(n_1; t_1), (n_2; t_2), \ldots, (n_k; t_k)$; при этом уравнение совместных измерений имеет вид $t = f(n, T) = n \cdot T$.

3 Погрешности измерений и их классификация

Наличие в общем случае большого числа неконтролируемых исследователем факторов приводит к тому, что в результате измерения физической величины возникают ошибки (погрешности). Иными словами, важнейшей особенностью любых измерений является несовпадение результата измерений и истинного значения измеряемой величины. Целью любой математической обработки результатов измерений является получение оценки истинного значения измеряемой величины с минимально возможной погрешностью.

Абсолютная погрешность измерения Δx — отклонение результата измерения x от истинного значения $x_{\text{ист}}$ измеряемой величины:

$$\Delta x = x - x_{\text{ист}}$$

Относительная погрешность измерения — это отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}}$$

Как правило, истинное значение измеряемой физической величины мы не знаем и никогда не узнаем, а значит и погрешность измерения мы *не знаем и никогда не узнаем*. Однако погрешность измерения можно охарактеризовать и *оценить*.

3.1 Классификация погрешностей измерения по характеру проявления

Случайная погрешность — это составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом в данной серии измерений, проведённых при одних и тех же контролируемых условиях. Случайная погрешность возникает как результат совместного влияния различных случайных, меняющихся от измерения к измерению, не контролируемых нами факторов, влияющих на процесс измерения. Случайная погрешность оценивается по результатам многократных измерений, проводимых при неизменных условиях, методами математической статистики. Влияние случайной погрешности на оценку истинного значения измеряемой величины можно уменьшить многократным повторением измерения.

Систематическая погрешность — это составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или изменяющаяся закономерно на протяжении серии измерений при одних и тех же контролируемых условиях. Систематическая погрешность обусловлена главным образом погрешностями средств измерений и несовершенством методов измерений (в том числе используемых моделей). Неизбежное абстрагирование (выбор модели процесса, явления или изучаемой системы) в процессе измерения является одним из факторов возникновения систематической погрешности.

Систематическую погрешность нельзя-нельзя исключить увеличением числа измерений. Её уменьшают введением поправок (обычно в виде дополнительных слагаемых или множителей) после изучения источников погрешностей и их выявления. Наиболее действенный способ обнаружения систематических погрешностей, связанных с методом измерения, — это сравнение результатов измерения одной и той же величины, полученных принципиально разными методами. Полностью исключить систематическую погрешность нельзя, так как, с одной стороны, сами эталонные приборы обладают погрешностью, а с другой, любой принцип, заложенный при конструировании прибора, не является абсолютно строгим.

Грубые ошибки (промахи) — ошибки, обусловленные неисправностью средств измерений, неправильным считыванием результата, резкими не учтенными изменениями условий измерений, результатом просчёта. Такие ошибки исправляют при более тщательном повторении опытов или расчётов.

3.2 Классификация систематических погрешностей по причине возникновения

Погрешность прибора (инструментальная погрешность, погрешность средств измерений) — связана с принципиальным несовершенством технических средств, используемых при измерении. Причина возникновения — несовершенство реальных материалов, невозможность устранения вредных помех, технологическое и физическое (из-за вынужденного использования приближений при выборе принципа работы прибора) несовершенство прибора.

Примеры:
а) неточная установка прибора на нуль перед измерением;
б) секундомер, используемый при измерениях, отстаёт или спешит.

Погрешность округления — систематическая погрешность, обусловленная считыванием результата с конечным числом значащих цифр на цифровых приборах и округлением по шкале стрелочных приборов. Нередко погрешность округления относят к случайным погрешностям, объясняя это тем, что при многократных измерениях результат можно округлить как в большую, так и в меньшую сторону. Однако, если бы при проведении измерений случайные погрешности отсутствовали, прибор всегда показывал бы одно и то же значение, и результат округлялся бы всегда также до одного и того же значения.

Погрешность метода — погрешность, вызванная несовершенством применяемого при измерении метода. Причина — метод, положенный в основу любого процесса измерения, лишь с какой-то степенью точности правильно отображает истинное положение вещей. Любой метод зиждется на принципиально необходимом абстрагировании реальной ситуации, т.е. на введении в рассмотрение моделей.

Пример:

в используемой математической модели эксперимента не учитывается наличие сил трения и сопротивления воздуха, упругих свойств тел и др.

Субъективная погрешность — систематическая погрешность, связанная с участием человека в процессе измерений, что приводит к искажению получаемого результата. Отметим, что субъективная погрешность содержит и случайную составляющую, которую можно оценить по результатам многократных измерений. К систематической составляющей субъективной погрешности можно отнести, например, наличие временной задержки при фиксации человеком длительности временного интервала с помощью секундомера.

4 Обработка результатов

4.1 Прямые измерения

Пусть в результате серии прямых независимых измерений физической величины, проведённых при одних и тех же условиях, получили некоторый набор (выборку) из n значений: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. За оценку $\hat{x}$ истинного значения измеряемой величины принимается среднее арифметическое измеренных значений:

$$\hat{x} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1)$$

Для оценки погрешности среднего арифметического $\bar{x}$ рассмотрим отдельно случайную и систематическую составляющие.

4.1.1 Случайные погрешности

В качестве оценки случайной погрешности $\sigma_{\bar{x}}^{(случ.)}$ среднего значения x принимается выборочное стандартное отклонение среднего арифметического (среднеквадратичная погрешность среднего арифметического):

$$\sigma_{\bar{x}}^{(случ.)} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{2}$$

4.1.2 Систематические погрешности

Погрешность считывания с прибора (приборная + округления)

- Для **аналоговых измерительных приборов** (на которых значение считывается со шкалы: линейка, стрелочные приборы и т. д.) погрешность принято считать равной половине цены деления, то есть разности значений, соответствующих ближайшим соседним делениям.

  Например, для обычной линейки цена деления равна 1 мм, а погрешность измерения с её помощью составляет 0.5 мм.

- Для **цифровых измерительных приборов** за оценку погрешности принимают единицу наименьшего разряда цифрового индикатора при однократном отсчете или единицу последнего стабильно горящего (немигающего) разряда при непрерывно проводимых измерениях.

  Например, если весы при измерении массы предмета показали значение 12.4 г, то приборная погрешность этого значения составит 0.1 г.

Субъективная погрешность. Для измерении временных интералов при помощи секундомера следует учитывать погрешность, связанную с временем реакции человека, составляющую примерно 0.2 с.

Погрешность метода можно оценить, изучив допущения, лежащие в его основе. Например, если в эксперименте не была учтена сила трения, можно попробовать оценить её значение.

4.1.3 Расчёт суммарных погрешностей

Для вычисления суммарной погрешности, учитывающей и случайный, и систематический вклады, используется формула

$$\sigma^{(сумм.)} = \sqrt{\left(\sigma^{(случ.)}\right)^2 + \left(\sigma^{(сист.)}\right)^2} \tag{3}$$

Если систематическая погрешность сама по себе имеет несколько источников (например, есть и приборная погрешность $\sigma_1^{(сист.)}$, и субъективная $\sigma_2^{(сист.)}$, ...), её полное значение рассчитывается как

$$\sigma^{(сист.)} = \sqrt{\left(\sigma_1^{(сист.)}\right)^2 + \left(\sigma_2^{(сист.)}\right)^2 + \ldots} \tag{4}$$

Замечание. Одновременно учитывать все составляющие погрешности прямого измерения следует лишь в том случае, если их значения близки друг к другу. Любым из слагаемых в формулах (3) и (4) можно пренебречь, если оно не превосходит одной трети или одной четверти другого. В этом состоит так называемое правило «ничтожных погрешностей».

4.2 Косвенные измерения

Пусть в результате измерения физических величин $x, y, z, \dots$ были получены оценки их значений $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \dots$ и погрешностей этих значений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Если зависимость величины u от измеренных величин по закону $u = f(x, y, z, \dots)$, то за оценку истинного значения u принимается

$$\hat{u} = f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \dots)$$

При расчёте погрешности результатов косвенных измерений необходимо учитывать в каждом конкретном случае явный вид функции $f(x, y, z, \dots)$, по которой производился расчёт искомой величины. Существует метод, позволяющий найти погрешность в общем случае для любого вида функции f. Однако он требует знания основ математического анализа и поэтому здесь не приводится. Вместо этого будем использовать результаты его применения в некоторых конкретных случаях.

Если физические величины x, y, z измерены *независимо*, то погрешность выражаемой через них величины u расчитывается в соответствии со следующими правилами:

- **Связь относительной и абсолютной погрешностей**

  $$\delta_x = \frac{\sigma_x}{\hat{x}}, \ \ \sigma_x = \hat{x}\delta_x, \tag{5}$$

  где σ_x и δ_x — соответственно абсолютная и относительная погрешности величины x.

- **Погрешность суммы или разности**

  Если $u = x + y$ или $u = x - y$, то

  $$\sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \tag{6}$$

- **Погрешность при домножении на константу**

  Если $u = nx$, где n — фиксированное число, то

  $$\sigma_u = n\sigma_x, \ \ \delta_u = \delta_x \tag{7}$$

- **Погрешность произведения или частного**

  Если $u = xy$ или $u = {}^{x}\!/_{y}$, то

  $$\delta_u = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} \tag{8}$$

- **Погрешность степени**

  Если $u = x^n$, где n — некоторое фиксированное число, то

  $$\delta_u = n\delta_x \tag{9}$$

Обобщая формулы (6)–(9), можем получить более общие правила:

- **Произвольная сумма**

  Если $u = nx + my + kz + \ldots$, где n, m, k — некоторые фиксированные числа, то
  $$\sigma_u = \sqrt{(n \cdot \sigma_x)^2 + (m \cdot \sigma_y)^2 + (k \cdot \sigma_z)^2 + \ldots} \tag{10}$$

- **Произвольное произведение**

  Если $u = x^n \cdot y^m \cdot z^k \cdot \ldots$, где n, m, k — некоторые фиксированные числа, то
  $$\delta_u = \sqrt{(n \cdot \delta_x)^2 + (m \cdot \delta_y)^2 + (k \cdot \delta_z)^2 + \ldots} \tag{11}$$

Пример 1. Допустим, требуется измерить коэффициент жёсткости пружины. Для этого были измерены значения приложенной к пружине силы F и соответствующего удлиннения пружины l:
$$F = \hat{F} \pm \sigma_F = 960 \pm 10 \text{ мН}$$
$$l = \hat{l} \pm \sigma_l = 2.80 \pm 0.05 \text{ см}$$

Проведём расчёт оценки значения коэффициента жёсткости $\hat{k}$ и его погрешности σ_k.

1. Оценим значение k:
   $$\hat{k} = \frac{\hat{F}}{\hat{l}} = \frac{960 \text{ мН}}{2.80 \text{ см}} = 34.286 \text{ Н/м}$$

2. Для оценки погрешности k используем формулу (8), где в качестве искомой величины u выступает жёсткость пружины k, а в качестве известных числителя x и знаменателя y — сила F, приложенная к пружине, и её удлиннение l соответственно.

   В формулу входят относительные погрешности физических величин F и l, поэтому нужно предварительно их получить из значений и абсолютных погрешностей этих величин, пользуясь соотношениями (5):
   $$\delta_F = \frac{\sigma_F}{\hat{F}} = \frac{10 \text{ мН}}{960 \text{ мН}} = 0.01042$$
   $$\delta_k = \frac{\sigma_k}{\hat{k}} = \frac{0.05 \text{ см}}{2.80 \text{ см}} = 0.01786$$

   Можно заметить, что относительные погрешности величин F и l близки, поэтому обе вносят вклад в погрешность коэффициента жёсткости. Теперь применим выражение (8):
   $$\delta_k = \sqrt{\delta_F^2 + \delta_l^2} = \sqrt{0.01042^2 + 0.01786^2} = 0.0207$$

   Зная значение относительную погрешность δ_k коэффициента жёсткости пружины, найдём с помощью (5) его абсолютную погрешность:
   $$\sigma_k = \hat{k}\delta_k = 34.286 \text{ Н/м} \cdot 0.0207 = 0.7 \text{ Н/м}$$

Итак, получили окончательный ответ:
$$k = \hat{k} \pm \sigma_k = 34.3 \pm 0.7 \text{ Н/м}.$$

Пример 2. Пусть требуется оценить объём V тела цилиндрической формы и его погрешность, если были измерены значение диаметра цилиндра $D = 1.20 \pm 0.05$ см и его высоты $h = 3.00 \pm 0.05$ см.

1. Получим оценку значения объёма цилиндра:

$$\hat{V} = \frac{\pi}{4}\hat{D}^2\hat{h} = \frac{\pi}{4} \cdot (1.20 \text{ см})^2 \cdot 3.00 \text{ см} = 3.3930 \text{ см}^3$$

2. Найдём относительные погрешности величин D и h из по правилу (5):

$$\delta_D = \frac{\sigma_D}{\hat{D}} = \frac{0.05 \text{ см}}{1.20 \text{ см}} = 0.04167$$
$$\delta_h = \frac{\sigma_h}{\hat{h}} = \frac{0.05 \text{ см}}{3.00 \text{ см}} = 0.01667$$

3. Используя соотношения (9), (8) и (7) или соотношение (11), оценим относительную погрешность объёма цилиндра:

$$\delta_V = \sqrt{(2\delta_D)^2 + \delta_h^2}$$

   Заметим, что в данном случае δ_h значительно меньше, чем $2\delta_D$, поэтому можно пренебречь вкладом в погрешность V, связанную с неточностью измерения h:

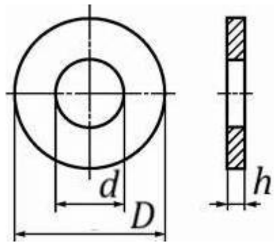
$$\delta_V \approx 2\delta_D = 2 \cdot 0.04167 = 0.083$$

4. Абсолютная погрешность объёма

$$\sigma_V = \hat{V}\delta_V = 3.3930 \text{ см}^3 \cdot 0.083 = 0.28 \text{ см}^3$$

Ответ: $V = 3.39 \pm 0.28$ см^3

Пример 3. Пусть теперь требуется измерить объём шайбы. Известны внешний и внутренний диаметры шайбы $D = \hat{D} \pm \sigma_D$ и $d = \hat{d} \pm \sigma_d$, а также её высота $h = \hat{h} \pm \sigma_h$.



1. Получим выражение, выражающее объём через известные величины:

$$V = hS = h(S_D - S_d) = h\left(\frac{\pi}{4}D^2 - \frac{\pi}{4}d^2\right)$$

   Отсюда рассчитаем $\hat{V}$.

2. В соответствии с (5) найдём относительные погрешности δ_D и δ_d внешнего и внутреннего диаметров.

3. Используя (9) и (7), оценим относительные погрешности δ_{S_D} и δ_{S_d} величин $S_D = \pi D^2/4$ и $S_d = \pi d^2/4$.

4. Найдём абсолютные погрешности σ_{S_D} и σ_{S_d} площадей S_D и S_d по формуле (5).

5. Получим абсолютную погрешность σ_S площади $S = S_D - S_d$, используя (6).

6. Рассчитаем относительную погрешность δ_S площади S с помощью (5).

7. Используя (8), найдём относительную погрешность δ_V объёма V.

8. Наконец, перейдём от относительной δ_V к абсолютной σ_V погрешности объёма по формулам (5).

Итак, получена оценка величины объёма шайбы и её погрешности: $V = \hat{V} \pm \sigma_V$.

Замечение к примеру 3.

Формулу для объёма шайбы можно записать и иначе:

$$V = V_D - V_d = \left(\frac{\pi}{4}hD^2 - \frac{\pi}{4}hd^2\right)$$

Кажется, что можно провести оценку погрешности объёма «по действиям» и в соответствии с этой формулой: сначала получить погрешности объёмов V_D и V_d (используя процедуру, описанную в примере 2), а затем по формуле (6) расчитать итоговую погрешность объёма V. Но это рассуждение неверно: величины V_D и V_d не являются независимыми, так как в расчётную формулу для обеих входит высота шайбы h, поэтому использование (6) в этом случае некорректно.

4.3 Совместные измерения

Пусть проведена серия измерений пар величин (x, y) при разных значениях x. Пусть, кроме того, известен вид зависимости y от x: $y = f_{a,b,\dots,c}(x)$ (например, линейная $y = f_{a,b}(x) = ax + b$, квадратичная $y = f_{a,b,c}(x) = ax^2 + bx + c$ и т. д.), но неизвестны значения конкретных числовых параметров $a, b, \dots, c$ этой зависимости. Требуется найти такие значения этих параметров, чтобы полученная теоретическая кривая наилучшим образом ложилась на экспериментально измеренные точки.

Существуют разные критерии наилучшего соответствия кривой экспериментальным точкам. Одним из наиболее общих способов выбора оптимальной кривой является разработанный Лежандром и Гауссом *метод наименьших квадратов* (МНК). Согласно этому методу оценки параметров $a, b, \dots, c$ кривой выбираются так, чтобы минимизировать сумму ε квадратов отклонений точек от прямой, измеренных по вертикали:

$$\varepsilon(a, b, \dots, c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f_{a,b,\dots,c}(x_i))^2 \qquad (12)$$

В общем случае (для произвольного вида зависимости $y = f_{a,b,\dots,c}(x)$) подбор параметров, соответствующих минимальной ошибке ε, может быть реализован только численно. Такой расчёт можно произвести на компьютере.

Случай линейной зависимости. Задача нахождения наилучших параметров аппроксимирующей кривой, как уже было сказано, в общем случае является достаточно сложной и наиболее просто решается, если функциональная зависимость имеет вид прямой линии $y = ax + b$. Поэтому на практике, если это возможно, сложные функциональные зависимости сводят к линейным зависимостям.

Например, если известно, что $y = ax^2$, строят зависимость величины y от квадрата величины x; так как y прямо пропорционалоно x^2, эта зависимость должна быть линейной.

Итак, пусть имеющаяся зависимость уже сведена к линейной. Тогда имеется набор экспериментальных точек (x_i, y_i), через которые необходимо провести прямую. Иначе говоря, требуется подобрать такие значения параметров a и b, чтобы прямая $y = ax+b$ наилучшим образом ложилась на эти точки.

Поставленная задача может быть решена аналитически с использованием аппарата математического анализа. В результате получаются следующие выражения для параметров a и b:

$$\hat{a} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \qquad \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} \tag{13}$$

где $\bar{x} = \sum x_i/n$, $\bar{y} = \sum y_i/n$ — средние значения x_i и y_i соответственно.

Заметим, что из выражения для $\hat{b}$ следует, что искомая прямая проходит через точку $(\bar{x}, \bar{y})$.

Погрешности найденных оценок параметров a и b находят по формулам

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{n-2}\left[\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} - \hat{a}^2\right] \qquad \sigma_b^2 = \sigma_b^2\left(\bar{x}^2 + \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2\right) \tag{14}$$

Для нахождения оптимальных параметров прямой и их погрешностей не обязательно производить вручную вычисления по формулам (13), (14): расчёт можно выполнить на компьютере с использованием соответствующих программных средств (Origin, Excel, Python и др.). Таким образом можно получить точный результат.

В случае, если под рукой нет компьютера, но есть график с экспериментальными точками, например, на миллиметровке, значения и погрешности параметров a и b можно *примерно оценить* графически следующим способом.

Сначала на графике отмечают точку с координатами$(\bar{x}, \bar{y})$. Через неё проводят прямую, зрительно наилучшим образом ложащуюся на экспериментальные точки (экспериментальные точки должны располагаться равномерно по обе стороны от этой прямой). На рис. 1 такой прямой является 1 – 2.

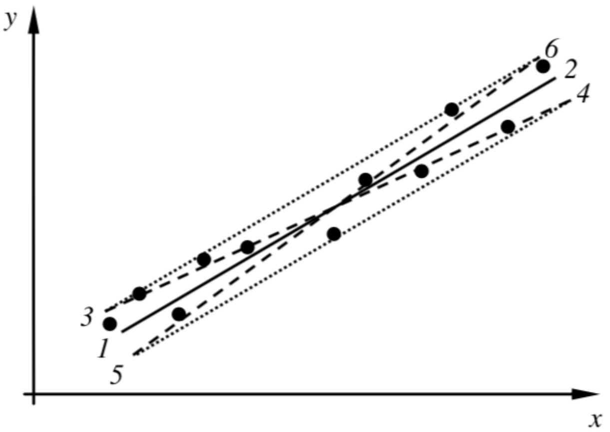


Рис. 1. Построение прямых для определения параметров линейной зависимости по графику

На полученной прямой выбирают две достаточно удаленные друг от друга точки (точки 1 и 2). Их координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) используют для определения параметров a и b полученной прямой:

$$\hat{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad \hat{b} = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Для оценки погрешностей a и b строят две дополнительные симметричные прямые 3 – 6 и 5 – 4, параллельные прямой 1 – 2 так, чтобы экспериментальные точки в основном располагались между ними.

Соединив противоположные концы коридора предельными прямыми (прямые 3 – 4 и 5 – 6), определяют их параметры так же, как и для прямой 1 – 2. После чего определяют отклонения a и b:

$$\sigma_a = \frac{|a_{34} - a_{56}|}{2}, \qquad \sigma_b = \frac{|b_{34} - b_{56}|}{2}$$

5 Оформление результатов

5.1 Округление полученных значений

При проведении экспериментальных исследований результат измерения физической величины x обычно принято записывать в виде:

$$x = \hat{x} \pm \sigma_x,$$

где $\hat{x}$ — оценка значения измеряемой величины, σ_x — оценка погрешности измерения.

Пусть в результате измерения (например, косвенного — с использованием расчёта на калькуляторе) получен (в некоторых единицах измерения) результат

$$x = 12,3456789 \pm 0,12345.$$

Но есть ли смысл записывать величину до седьмого знака после запятой, если погрешность составляет десятые доли единицы? И нужно ли сохранять все полученные цифры в погрешности, если всего нескольких достаточно, чтобы понять, насколько далеко истинное значение величины может отклоняться от измеренного?

Возникает необходимость округлить результат измерений. Важно при этом, с одной стороны, не внести погрешность округления, сравнимую или превышающую другие погрешности, а с другой — оставить только достоверные цифры. Округление значения физической величины проводится с учетом найденного значения погрешности.

Прежде чем сформулировать правило округления, удовлетворяющее этим условиям, сформулируем вспомогательное определение.

Значащие цифры данного числа — все цифры от первой слева, не равной нулю, до последней справа. При этом нули, следующие из множителя 10^n (n – целое число), не учитывают.

Примеры:

- $0,2396$ — 4 значащие цифры, первая цифра — 2;
- $0,00173$ — 3 значащие цифры, первая цифра — 1;
- 30170 — 5 значащих цифр, первая цифра — 3, последний нуль — также значащая цифра;
- $301,7 \cdot 10^2$ — 4 значащие цифры, первая цифра — 3, последняя — 7;
- 20000 — 5 значащих цифр, первая цифра — 2, все последующие нули — также значащие цифры;

- $20 \cdot 10^3$ — 2 значащие цифры, первая цифра — 2, вторая цифра — 0, нули, следующие из множителя 10^3 , не учитывают;
- $0,02 \cdot 10^6$ — одна и единственная значащая цифра — 2.

Обратите внимание, что, хотя некоторые из записей выше математически идентичны, они содержат разное число значащих цифр.

Теперь сформулируем собственно правила округления.

1. Округление следует начинать с погрешности, оставляя одну или две значащие цифры. Если первая значащая цифра — единица или двойка, то после округления оставляют две значащие цифры. Если же первая значащая цифра – тройка и более, то оставляют одну значащую цифру.

   Например:
   - $0,17295 \to 0,17$
   - $4,8329 \to 5$
   - $0,97283 \to 1,0$ *(именно так, а не просто 1, чтобы подчеркнуть, что погрешность погрешности в первом знаке после запятой)*
   - $0,006298 \to 0,006$ или $0,6 \cdot 10^{-2}$ или $6 \cdot 10^{-3}$
   - $384,53 \to 0,4 \cdot 10^3$ или $4 \cdot 10^2$ *(но не 400 — ведь это 3 значащие цифры)*

2. Далее округляется сама величина, причем ее последняя значащая цифра должна находиться на той же позиции, что и последняя значащая цифра погрешности.

   Например:
   - $3,4874 \pm 0,17295 \to 3,49 \pm 0,17$
   - $285,396 \pm 4,8329 \to 285 \pm 5$
   - $12,482 \pm 0,97283 \to 12,5 \pm 1,0$
   - $19,98281 \pm 0,8138 \to 20,0 \pm 0,8$ *(нули должны быть указаны обязательно — это значащие цифры)*
   - $62171,563 \pm 384,53 \to (62,2 \pm 0,4) \cdot 10^3$ или $(622 \pm 4) \cdot 10^2$

3. Если при округлении погрешности указан порядок, т.е. 10^n, то такой же порядок должен быть и у самой величины, при этом оба числа заключаются в скобки, и множитель 10^n указывается один раз, как в последнем примере выше.

Приведенные выше правила следует применять для записи окончательного результата, фиксируемого в отчете. Если же выполняются промежуточные расчёты, результаты которых будут в дальнейшем использоваться в других формулах, то следует всегда оставлять на две-три значащих цифры больше.

5.2 Проверка равенства измеренных величин

Если необходимо убедиться в достоверности измерения физической величины $\hat{x} \pm \sigma_x$, действительное значение которой x — известно, следует проверить, лежит ли оно в интервале $[\hat{x} - \sigma_x; \hat{x} + \sigma_x]$

Если вы проверяете закон $x = y$, то результат проверки будет достоверен лишь при наличии общих точек у интервалов $[\hat{x} - \sigma_x; \hat{x} + \sigma_x]$ и $[\hat{y} - \sigma_y; \hat{y} + \sigma_y]$, то есть при частичном или полном перекрытии этих интервалов.

Для наглядности результаты представляют графически с использованием линейной шкалы (см. рис. 2).

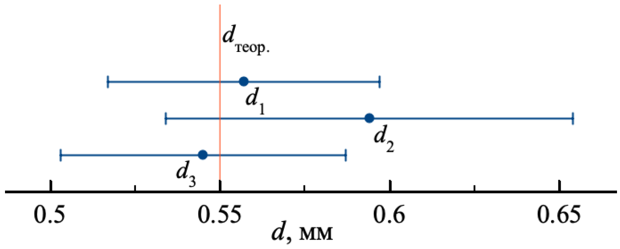


Рис. 2. Графическое сравнение результатов измерений

5.3 Построение графиков

Важным методом обработки и представления результатов эксперимента является их изображение в виде графика. Графики представляют результаты измерений компактно и наглядно, позволяют проверить соответствие теории и результата эксперимента.

Графики должны легко читаться, для этого необходимо соблюдать общие правила, изложенные ниже.

1. По горизонтальной оси откладывают значения аргумента, по вертикальной — значения функции.

Выбор интервалов изменения переменных. Выбор масштаба.

2. Интервалы изменения переменных по обеим осям выбираются независимо друг от друга так, чтобы на графике была представлена лишь экспериментально исследованная область изменения величин. Сам график при этом занимает всё поле чертежа. Не требуется, чтобы в точке пересечения осей было начало координат $(0, 0)$, хотя в некоторых случаях это может быть разумно.

3. На осях обычно делают 5 – 10 делений, рядом с ними наносят их числовые значения. Слишком частые или редкие деления затрудняют восприятие. Измеренные значения на шкалы не наносят.

4. Масштаб выбирают удобным для считывания, он сохраняется на всей оси. Обычно выбирают числа, кратные 10 (1), 2, 5, по возможности целые. Числа, кратные 3, 4, 6, 8, 12 и т.д., не используются в качестве масштабных отрезков. На миллиметровой бумаге за координатный отрезок выбирают такой отрезок, чтобы считать значения можно было без дополнительных расчётов: 1; 2; 5 см (допускается 2,5 см). Если масштаб кратен 2, то и масштабные числа должны быть кратны 2 (если масштаб кратен 5, то и числа должны быть кратны 5 и т.д.).

5. На осях должны быть обозначены изображаемые переменные и их единицы измерения.

6. Чтобы не писать нули, повторяющиеся во всех цифрах, множитель выносят к единицам измерения (кратный 10^3) или к обозначению измеряемой величины (например, так: «U, мВ» / «U, 10^{-3} В» / «$U \cdot 10^{-3}$, В»).

Нанесение экспериментальных точек и их погрешностей.

7. Экспериментальные точки являются главным содержанием графика, поэтому они должны быть показаны максимально четко и крупно.

8. Если на графике показаны несколько наборов точек, соответствующим разным величинам или разным условиям эксперимента, каждый набор нужно показать своими символами (кружки, крестики, квадраты и т.д.).

9. Погрешности измерения каждой точки указываются отрезками, длина которых равна величине ошибки. Если погрешность по одной из осей (или по обеим осям) оказывается слишком малой, то предполагается, что она отображается на графике размером самой точки.

Построение линии функциональной зависимости по экспериментальным точкам.

10. Нельзя соединять отрезками нанесенные точки или проводить кривую точно по точкам: надо провести плавную кривую (наиболее простой формы) по возможности в пределах ошибок измерений.

11. Если известна теоретическая зависимость — построить её на графике (провести аналогичную кривую через экспериментальные точки). В подписи к графику обязательно укажите, что кривая – это теоретическая зависимость (указать, какая).

12. Если теоретическая зависимость не известна, кривая должна быть как можно более простой (как можно меньше минимумов и максимумов, перегибов). Если возможно — проведите прямую (прямая — самая простая кривая). Каждый максимум и минимум на кривой, и даже каждый ее перегиб — это целое физическое явление (и каждое это явление вам придется объяснить).

Оформление графиков.

13. Графики должны быть снабжены заголовками и пояснениями, кратко и точно отражающими содержание графика. Заголовок и пояснения располагают либо под графиком, либо на незанятой части координатной сетки.

14. Если на одном графике располагается несколько кривых, то каждая из них должна быть четко обозначена цифрой или буквой, поясняемой в подписи к графику.

Список литературы

[1] Митин И. В., Русаков В. С. Анализ и обработка экспериментальных данных. Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. — М.: Изд-во НЭВЦ ФИПТ.1998.— 48с.

[2] Митин И. В. Умеете ли Вы правильно округлять?

[3] Ананьева Н. Г., Ананьева М. С., Самойлов В. Н. Графическое оформление результатов эксперимента

[4] Морозов В. В., Соботковский Б. Е., Черненко Ю. С., Шейнман И. Л. Методы обработки результатов физического эксперимента — Санкт-Петербург, 2016

[5] Громова Е. С., Панюшкин А. В., Бодунов Е. Н. Обработка результатов лабораторного физического эксперимента.

[6] https://gigabaza.ru/doc/84626.html

[7] http://sites.fml31.ru/physics/vse-dla-eksperimenta/obrabotka-rezultatov-eksperimenta/pravila-postroenia-grafikov